

colorchecker CLASSIC

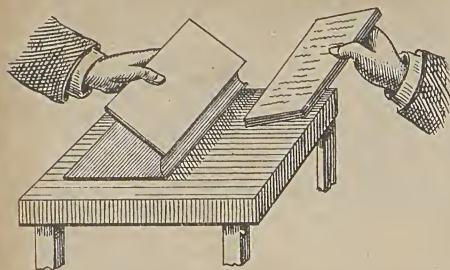


+ x-rite

mm

MAIN GAUCHE

MAIN DROITE



RELIURE ÉLECTRIQUE OU INSTANTANÉE

I. F.

Exiger la marque de Fabrique PARIS-LONDON
Patent.

MODE D'EMPLOI

De la main gauche, soulever un des côtés en appuyant l'intérieur de l'autre sur le bureau ; le dos se trouvant ainsi ouvert, la main droite sert à introduire ou retirer les papiers.

Laisser la reliure revenir sur elle-même et les papiers se trouvent fixés.

N.B. — La chemise renfermée dans chaque reliure n'est pas indispensable, mais elle facilite l'introduction des papiers.

RELIURE ÉLECTRIQUE

*Servant à relier soi-même, sans difficulté,
les papiers, manuscrits, documents, etc.*

	FORMAT.	HAUT. LARG.
N° 0.	22 × 14
» 1.	In-8°	24 × 16
» 2.	In-4°	29 × 21
» 3.	Musique	36 × 26
» 4.	Ministre	32 × 22
» 5.	In-8° Jésus	28 × 18
» 6.	Journal illustré, etc....	40 × 28
» 7.	Quadrille	28 × 36
» 8.	Traite Mandat	13 × 29
» 9.	Journaux illustrés grand format	46 × 33

I. F.

PARIS, LONDON.

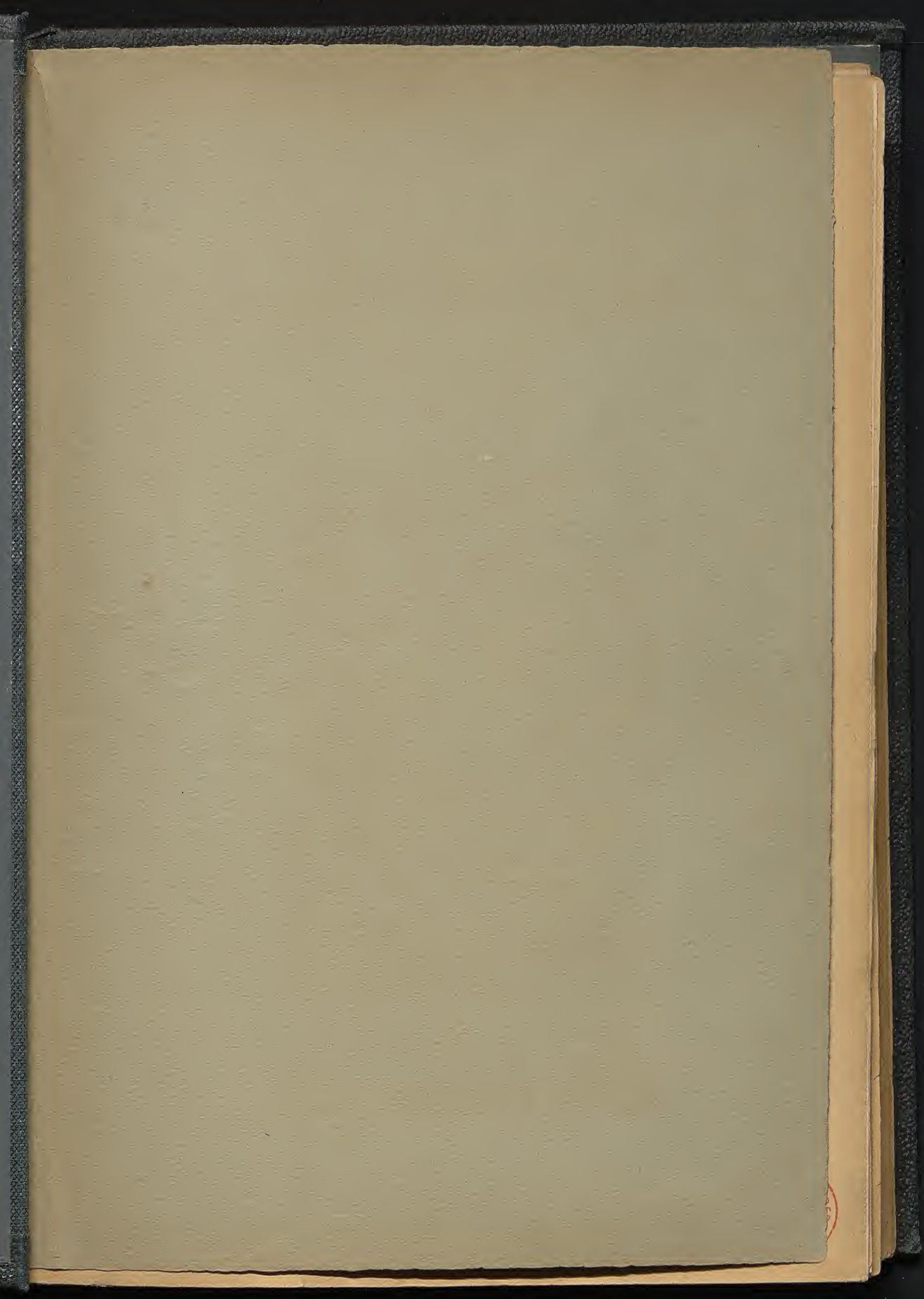
PATENT.

Spécialité d'Articles anglais pour Bureaux.

N° 1

Revêtu de la signature ci-dessous,
Machine Reliure Électrique.
ARTICLES SPECIAUX POUR BIBLIOTHÈQUES
FABRIQUE DE CARTONNAGES

GEORGES BORGEAUD
Rue des Saints Pères, 41^{bis}



MAIN



Leibnitz.

~~Hant~~ - Hegel.

Renouvier.

Candry - Moigno.

Evellin.

— Bolzano.

Du Bois - Raymond.

— Charles.

— Staudt.

{ Lüroth.

Helmholtz.

Kroncker.

Bolzano.

Poincaré.

Wierstraas.

Dedekind.

Miray.

Carnot.

Lipschitz.

Schubert.

Bellavitis.

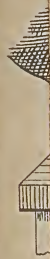
Moury.

Fraur.

Bouasse (Polarisation).



MAIN



Ms 128

Leibnitii et Bernoullii Commmercium epistolicum.
2 vol. in 4^{to} Lausannae & Genivae, Bousquet, 1745.

Tome I, p. 370 : Fortasse infinita, quae concipimus,
et infinite parva imaginaria sunt; sed apta
ad determinanda realia, ut radices quoque
imaginariae facere solent.

I. p. 384: Dubitari posse an lineae rectae infinite
longitudine, et tamen terminatae revera dentur.
Interim sufficere pro calculo, ut fingantur, uti
imaginariae radices in Algebra.

I. p. 397: Ut D. Volderus, ita olim Gregorius a S. Vincen-
tio alicubi dixit in infinito locum [non habere]. Axioma,
quod totum sit majus parte. Sed mihi videtur
alterutrum dicendum, vel infinitum revera non esse
unum totum, vel infinitum, si totum sit, et tamen
non sit majus sua parte, esse aliquid absurdum. Sane
ante multos annos demonstravi numerum seu multitudinem
omnium numerorum contradictionem implicare, si
ut unum totum sumatur.

B. p. 402: Infinita et infinite parva non possunt demonstrari
existere, sed etiam non possunt demonstrari non existere;
probabile tamen esse existere. Si omnes termini hujus
progressionis $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$ existunt, ergo existit
infinitesimus, et omnes qui eum sequuntur.

B. p. 407: Videtur mihi contradictio dicere omnes terminos
hujus progressionis ... existere, infinitesimos autem revera
non esse terminos: Si enim infinitesimi non existunt,
tunc finiti sunt termini; ergo non omnes existunt,
contra hypothesis.

L. p. 423: De Infinitesimis res huc redit, ut probetur
hec, quam adhibes, propositio: Si infinite numeros sunt
in serie ..., existit infinitesimus. Quid enim, si
quolibet eorum sit finitus, et assignabili intervallo
numero distans a primo? Nec video quid impediat
concupi seriem conflata non nisi exterminis magni-
tudine finitis, sed numero infinitis.

L. p. 431: Dubitari potest an equatur: Positis terminis
decem, datur decimus; ergo positis terminis infinitis,
datur infinitesimus. Dicit enim fortasse aliquis, argu-
mentum de finito ad infinitum hic non valere. Et cum
dicitur dari infinita, non dicitur dari eorum numerum
terminatum, sed dari ~~proposit~~ ^{plura} quovis numero terminato;
et pari jure conclusurum iri: Inter numeros decem datur
ultimus, qui et maximus eorum; ergo et inter omnes
numeros datur ultimus, qui et maximus omnium
numerosum; qualem tamen numerum puto
implicare contradictionem.

p. 440: Concedo multitudinem infinitam, sed hæc
multitudo non facit numerum, seu unum totum; nec
aliud significat, quam plures adesse terminos, quam
designari possint.

ms. II,
ntie,
4.
Leibniz: de Arte combinatoria. Prooemium (1666.)
(Extrait.)

Entis affectiones: Qualitas, Quantitas, Relatio.

Quantitas = Relatio rei ad partem suam

« Omnis Relatio aut est Unio, aut Convemientia. In

Unione autem res inter quas haec relatio est dicuntur
partes, Sumtae cum unione, Totum. Hoc contingit
quoties plura simul tanquam Unum supponimus.

Unum autem eo intelligitur quicquid uno actu
intellectus, seu simul, cogitamus, v. g. quemadmodum
numorum aliquem quantumlibet magnum, saepe Ceca
quadam cogitatione simul apprehendimus, cyphas
nempe in charta legendo, cui explicata intus non
Mathusale quidem aetas suffectura sit. Abstractum
autem ab Unis est Unitas, ipsiusque totum abstractum
est unitatibus, seu totalitas, dicitur Numerus.

Quantitas igitur est numerus partium. Hinc manifestum
in re ipsa quantitatem et numerum coincidere. Nam
tamen interdum quasi extrinsecè, relatione seu ratione ad
aliud, in subsidium nempe quandiu numerus partium
cognitus non est, capere. Et haec (est origo) ingeniosa

Analytica speciosa, quam excoluit in primis Cartesius,
postea in precepta collegere Franc. Schottgenius, et
Erasmus Barthelemy, hic dementis Matheseos universalis,

ut vocat. Est igitur Analysis doctrina de rationibus et
proportionibus, seu quantitate non exposita; Arithmetica
de quantitate exposita, seu numeris. Falco autem Scholasticus
credidere numerum ex sola divisione continui oriri, nec ad
incorpora applicari posse. Est enim numerus quasi figura

quedam incorporea orta ex unione entium quorumcunque
v. g. Dei, Angeli, Hominis, Motus, qui simul sunt
Quatuor. Cum igitur numerus sit quiddam universa-
lissimum, merito ad Metaphysicam pertinet; si Meta-
physicam accipias pro doctrina eorum que ~~in~~ omni
entium generi sunt communia.....

... uti ~~Analypis~~ ~~Aristonctica~~ atque ~~Analypis~~
agunt de quantitate entium, ita Geometria de quantitate
corporum, aut spatii quod corporibus coextensum est....

Examen des Principes du R. P. Malebranche

Philarete. Undoubtedly cependant avec raison, si nous avons
une idée d'un tout infini, ou d'un infini composé de parties;
car un composé ne saurait être un absolu. On dirait que nous
concevons bien, par exemple, que toute ligne droite peut être
prolongée, ou bien qu'il y a toujours une ligne droite plus grande
que la donnée; mais que cependant nous n'avons point l'idée
d'une ligne droite infinie, ou plus grande que toutes les autres
qu'on peut assigner.... ^(qui font)

Philarete. Il n'y a point de ligne droite infinie; mais toute
ligne droite peut toujours être prolongée ou surpassée par une
autre plus grande....

Lettre de M. Leterrier à M. Remond de Montmort, contenue dans
des Remarques sur le Livre du P. du Tertre contre le P. Malebranche.
Hannover, le novembre 1715.

III. L'Auteur ajoute que dans la prétendue connaissance de
l'infini, l'esprit voit seulement que les longueurs peuvent être
mises bout à bout et répétées ~~tant~~ ^{autant} qu'on voudra. Il est
bien; mais cet Auteur pourrait considérer, que c'est déjà
connoître l'infini, que de connoître que cette répétition
se peut toujours faire.

V. Reflexions de M. L. sur l'Essai de l'Enten humain de M. de
« Il y a encore d'autres choses dans ce second Livre qui m'avaient.... » p. 22

Leibniz. — Sur l'infini mathématique (Extraits)
Lettre de M. Leibniz à M. Foucher, chanoine de Dijon.
Sur quelques axiomes de philosophie. (1693.)

238. « Mon axiome, que la nature n'agit jamais par saut, est d'un grand usage dans la Physique. Il détermine les atomes, les petits repos, les globules du second élément, et les autres semblables chimiques. Il rectifie les lois du mouvement. Ne craignez point, Monsieur, la tortue que les Perses horreurs faisaient aller aussi vite qu'Achille. Vous avez raison de dire, que toutes les grandeurs peuvent être divisées à l'infini, Néanmoins à point des parties, dans laquelle on ne puisse concevoir une infinité de divisions que l'on n'épuise jamais. Mais si ne vois pas quel mal il en arrive, ou quel besoin il y a de les épuiser. Un espace divisible sans fin se passe dans un temps aussi divisible sans fin. Je ne conçois point d'indivisibles physiques sans miracle, et je crois que la nature peut réduire les corps à la petitesse que la Géométrie peut considérer.....

239. Les expressions semblables à cet axiome, Extrema in idem recidunt, vont un peu trop loin; comme lorsqu'on dit que l'infini est une sphère dont le centre est par-tout, et la circonférence nulle part, il ne faut pas les prendre à la rigueur; néanmoins elles ne laissent pas d'avoir un usage particulier pour l'inscution, à peu près comme les imaginaires de l'Algèbre. C'est ainsi que l'on conçoit la parabole comme une ellipse à force infiniment éloignée; et par là on obtient une ^{finie} ~~généralité~~ ^{maintenant} dans les conclusions du calcul nous même quelquefois à l'infini sans y en conjoindre. On pourroit donc ainsi conclure, qu'au moins en cas de prétendue ~~est~~ ^{est} infinie, chaque point du cercle ~~seroit~~ ^{seroit} toujours au même endroit; quoiqu'après tout, une vraie infinie soit impossible, aussi-bien qu'un cercle infini. Que tout cela ce cercle infini peut encore avoir son usage, en calculant;

car si l'analyse me faisoit voir que le rayon du cercle demandé
dans le plan donné est infini, je conclurois que le plan entier
du cercle demandé est le lieu qu'on cherche. Si si je ne
trouvois pas ce que je cherche, sçavoir un cercle qu'on demande,
je trouverois au moins ce que je devois chercher, sçavoir que
le lieu demandé est le plan demandé (?), et qu'il n'y a point
de tel cercle dans ce plan. De sorte que voilà omnia vana sanna
et l'analyse tire des vérités réelles des expressions imaginaires.
C'est de quoi j'ai des exemples très importants. Il colera que
des vérités on ne conclut que des vérités; mais il y a de certaines
faussetés qui sont utiles pour trouver la vérité.»

Reponse de M. Leibniz à l'extrait de la lettre de
M. Foucher... insérée dans le Journal du 16 mars 1693.

«Quant aux indivisibles, lors qu'on entend par là les simples
extrémités du tenu ou de la ligne, on n'y sçauroit concevoir de
nouvelles extrémités, ni des parties actuelles, ni potentielles.
Si les points ne sont ni gros ni petits, et il ne faut point de saut
pour les passer. Cependant le continu, quoiqu'il ait par-tout de
tels indivisibles, n'est point composé; comme il semble que les
objections des Sceptiques le supposent, qui à mon avis n'ont rien
d'insurmontable, comme on pourra en voir l'édifiant ou forme.
Le P. Gregoire de Saint Vincent a fort bien montré par le calcul même
de la divisibilité à l'infini, l'endroir où Achille doit attraper la tortue
qui le devance, selon la proportion des vitesses. Si la proportion
est à dissiper ces difficultés apparentes.

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'il a lieu de admettre
que la nature l'abhorre, comme on dit vulgairement, je tiens qu'il
n'est par tout, pour mieux marquer les perfections de son Etre.
Si je crois qu'il n'y a aucun partie de la matière qui ne soit
je n'est pas divisible, mais actuellement divisée; et par conséquent
la moindre particelle doit être considérée comme un monde plein
d'une infinité de créatures différentes.»

XXX Epistola Leibnitii ad P. des Bosses. 11 febr. 1706.

265. Ens et unum converti fecum sentio; unitatemque esse principium numeri, si rationis spectes, seu prioritatem naturae, non si magnitudinem; nam habemus fractiones, unitate utique minores in infinitum.

Continuum in infinitum divisibile est. Idque in linea recta vel ex eo constat, quod pars ejus est similis toti. Itaque cum totum dividi possit, poterit et pars et similiter quovis pars partis. Puncta non sunt partes continui, sed extremitates, nec magis minima data pars lineae, quam minima fractio unitatis.

Infinitum actu in natura dari non dubito,

66. P.S. Cum ubique Monades seu principia unitatis substantialis sint in materia, consequitur huic quoque infinitum actu dari; nam nulla pars est aut pars partis quae non monades contineat.

11 mars 1706.

267. Infinitum actu in magnitudine non seque ostendi potest ac in multitudine. Argumenta contra infinitum actu, supponunt, hoc admissis dari numerum infinitum, item infinita omnia esse aequalia. Sed sciendum, revera aggregatum infinitum neque esse unum totum, aut magnitudinem prae dictam, neque numero constare. Accurateque loquendo, loco numeri infiniti dicendum est plura adesse, quam numero ullo exprimi possint; aut loco lineae rectae infinitae, productam esse lineam ultra quamvis magnitudinem, quae assignari potest, ita, ut semper major recta adit. De essentia numeri, lineae et cujusvisque totius est, esse terminatum. Hinc et si magnitudine infinitus esset mundus, unum totum non esset; nec cum quibusdam veteribus fingi posset Deus velut unum a mundi, non solum quia causa mundi

(1) Cf. Examen des principes de R.P. Malebranche (Dutens II, I, 212.)

De Medici, 195.

est, sed etiam quia mundus tatis unum corpus non foret,
nec pro animali haberi posset, neque adeo nisi verbalem
haberet unitatem. Est igitur loquendi compendium, cum
unum dicimus, nisi plura sunt quam uno toto assignabili
comprehendi possunt, et magnitudinis instar offerimus, quod
proprietas ejus non habet. Quemadmodum enim de numero
infinito dici nequit, par sit an impar; ita nec de recta infini-
to data recta sit commensurabilis an secus; ut adeo
improprie tantum haec de infinito velut una magnitudine
sunt locutiones, in aliqua analogia fundata, sed quae si
accuratius examinas, subsistere non possunt. Plurimum absolute
et indivisibile infinitum veram unitatem habet, nempe Deus.
Atque hoc sufficere puto ad satis faciendum omnibus argum-
entis contra infinitum actu, quae etiam ad infinitum potentiale
suo modo adhiberi debent. Neque enim negari potest, omnium
numerorum positivum naturas revera dari, saltem in
divina mente, adeoque numerorum multitudinem esse
infinitam.

Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudinem
infinitae parvas quam infinite magnas, seu non magis infinite
simples quam infinitas. Utraque enim per modum
loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad
Calculus aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in
Algebra. Intoties demonstravi, magnam has expressiones
usum habere ad compendium cogitandi adeoque ad inven-
tionem; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite
parvo substitui sufficiat tam parvum quam quis volet, ut
error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse.

Ceterum, ut ab ideis Geometricis, ad ~~re~~ realia Physica transi-
statuo materiam actu fractam esse in partes quavis datae minoris,
nullam esse partem, quae non actu in alias sit subdivisa divinos
excurrentes. Illud postulat natura materiae et motus, et tota rerum compo-
sitio per Physicas, Mathematicas et Metaphysicas rationes.

1^{er} Septembre 1706.

..... Quartam [propositionem], ne fallor, jam refutarunt Mathematici, et non pauca ipse edidi Scientia infiniti specimina Interioris sentis, proprie loquendo, infinitum ex partibus Constant neque unum esse neque totum, nec nisi per notionem mentis concipi, ut quantitatem. Solum infinitum impartibile unum est, sed totum non est: id Infinitum est DEUS.

24 Janvier 1713.

Infinitudo continui physici, in Hypothesei merarum monadum, non tam penderet ex ratione optimi, quam ex principio Rationis sufficientis; quia nulla est ratio limitandi seu finiendi, sive alicubi sistendi. cf. Theodicea, 198.

Continuum vero Mathematicum exsistit ⁱⁿ ex mera possibilitate, ut numeri; ideo in eo necessaria est infinitudo, ex ipsa ejus notione.

16 Juin 1712.

Explicationem phenomenorum omnium per solas Monadum perceptiones inter se conspirantes, seposita substantia corporea, tentidem censeo ad fundamentalem rerum inspectionem. Et hoc exponendi modo spatium fit ordo coexistentium phenomenorum, ut tempus successivorum; nec ulla est monadum propinquitas, aut distantia spatialis, vel absoluta, dicereque, esse in puncto conglobatas, aut in spatio disseminatas, est quibusdam fictionibus animi nostri uti, dum imaginari libenter vellemus, quae tantum intelligi possunt. In hac etiam consideratione nulla occurrit extensio aut compositio continui, et omnes de punctis difficultates evanescent. Atque hoc est, quod dicere volui alicubi in Theodicea⁽¹⁾ difficultates de compositione continui admonere nos debere, res longe aliter esse conspiciendas.

(1) n° 384.

Je crois qu'il faut distinguer deux sens du mot proterochi: le premier, contenu dans la définition 2; le second, contenu dans la définition 9. Dans le premier sens, il désigne le glissement d'un corps mobile sur un corps ^{immobile} ~~fixe~~; dans le second, il désigne une espèce de choc, qui a lieu quand le corps choquant vient rencontrer la trajectoire du choqué au moment où celui-ci passe devant celui-là (!)

En fond, la distinction entre ce cas et les autres cas de choc (désignés par concurrents, occurens, accurens) est purement imaginaire (sauf dans le cas où un corps mobile vient choquer un corps immobile) cf. Th. 4 et 7.

Je crois devoir définir en langage moderne quelques expressions de Leibniz, pour éclaircir la suite.

La mesure de la ligne du mouvement est la tangente à la trajectoire du mobile au point où le choc a lieu; de plus, elle désigne une longueur égale à celle de l'arc de la trajectoire qu'elle considère, portée sur cette tangente à partir du point du choc.

Le côté de l'arrivée est la droite du plan perpendiculaire à cette tangente en son extrémité opposée au point du choc. Droite du plan, suivant que le mouvement des deux corps a lieu dans un même plan ou dans l'espace. Je dirai dans la suite, plan normal à la trajectoire.

Cela posé, les définitions de l'occurens et de l'accurens sont très-claires. Il y a occurens quand la tangente

(*) Dans le premier sens, c'est le corps ^{mobile} ~~choquant~~ qui passe devant l'autre: dans le second, c'est le choqué qui passe devant le choquant.

La trajectoire d'un des corps, prolongée au-delà du point du choc, rencontre le plan normal à la trajectoire de l'autre accursus dans le cas contraire. En un mot, il y a accursus quand les tangentes aux trajectoires (au point du choc) font un angle obtus, accursus quand elles font un angle aigu ou droit.

L'occursus est dit droit quand les deux tangentes font un angle de 180° (sont dans le prolongement l'une de l'autre ou encore parallèles, si le choc n'est pas central).

L'accursus est dit droit quand les deux tangentes font un angle de 90° , ou, comme on dit, quand les deux corps se rencontrent à angle droit.

Je trouve la preuve que le cas de l'incurrens et du prætervehens ne diffère pas réellement du cas de concursus dans les théorèmes 4 et 7. En effet, si les deux corps qui se choquent ont des vitesses égales, il est impossible de distinguer l'incurrens du prætervehens (comme cela serait possible si l'un se mouvait plus lentement que l'autre).

Mais, même dans le cas général (vitesses inégales) cette distinction n'a pas de raison d'être, car les deux corps est à la fois choquant et choqué (impingens et excipiens). Je ne vois là qu'une différence toute sentimentale et mystique. Logique qui vient de ce que l'observateur s'intéresse à l'un des deux corps et l'accompagne en imagination.

(1) «Utrumque concurrentium est mutuo incidens» (Th. 8.)

Fundamenta praedemonstrabilia.

- 1° Les parties sont données en acte dans le continu.
- 2° et elles sont actuellement infinies (Vindesini cartésien n'est pas dans la chose, mais dans l'esprit.)
- 3° Il n'y a pas de minimum d'espace ou de corps.
- 4° Sont données des indivisibles ou étendus. Le point est le commencement de la ligne, étendu (par dichotomie.)
- 5° Le point n'est pas ce qui n'a pas de parties, mais ce qui n'a aucune extension. (Méthode de Cavalieri.)
- 6° Le rapport du repos au mouvement n'est pas celui du point à l'espace, mais de zéro à un.
- 7° Le mouvement est continu (sans arrêt au repos.)
- 8° Car si une chose entre en repos, elle ne peut être mue que par une nouvelle cause.
- 9° Ce qui se meut tend à se mouvoir toujours avec les mêmes vitesse et direction (plage).
- 10° Le contact est au mouvement ce que le point est à l'espace, ou bien à l'infini: c'est le commencement et la fin du mouvant.
- 11° Tout ce qui se meut, si peu qu'il soit, progresse son contact dans le plein à travers tous les obstacles. Car même lorsqu'il est forcé d'arrêter, il fait effort pour ^{avancer} ~~continuer~~, donc il s'efforce de déplacer les obstacles, c'est-à-dire qu'il commence à les déplacer.
- 12° Dans un même corps peuvent exister en même temps plusieurs efforts contraires.
- 13° Un point du corps mobile est en plusieurs points de l'espace à l'instant de l'effort; il remplit un lieu plus grand qu'un repos. ^{14°} Tout ce qui se meut n'est jamais dans un seul lieu pendant qu'il se meut, ~~mais~~ ^{non} pas dans un instant (minimum de temps) (?) car ce qui se meut dans le temps, fait effort dans l'instant. [Il n'y a pas, selon Leibniz, de minimum de temps, ni d'espace.]
- 15° Au moment d'une rencontre de deux corps, les deux points ou les deux extrémités des corps sont en un même point (ou lieu.)
- 16° Les corps qui se pressent ou se poussent sont cohérents (ἐν τῇ ἐξέτασι, Aristote.)

- 17° Aucun effort ne dure sans mouvement au-delà d'un instant si ce n'est dans l'esprit. Car ce que l'effort est dans l'instant, le mouvement l'est dans le temps.
- 18° Comme aucun corps est en un moment, peu carus secunda.
- 18° Les points et les efforts peuvent être inégaux; les instants au contraire sont toujours égaux. Le temps a pour lui-même un mouvement uniforme. Un effort ne peut parcourir une ligne finie (en un instant) sans qu'on parcouvrirait une ligne infinie en un temps fini. De la inégalité d'un point résulte celle des points parcourus (espace plus petit que tout espace de l'apex. les arcs infiniment petits de deux cercles inégaux sont inégaux). L'effort soutient que l'arc infiniment petit diffère d'un cercle, en suivant l'arc (tendant à produire un mouvement circulaire) différent de l'effort suivant la corde (tendant à produire un mouvement rectiligne).
- 19° Deux efforts simultanés se composent en un seul, chacun par son mouvement. Exemple: la cycloïde est engendrée par la composition de deux efforts, le rectiligne (de translation) et le circulaire (de rotation).
- 20° Un corps qui se meut imprime à un autre, sans diminuer son mouvement, ce que l'autre peut recevoir sans changer le mouvement. (Th. 5 et 6)
- 21° Si un corps ne peut tout faire à la fois, et si la cause est égale pour tous les cas, aucune échappatoire n'étant possible (tertium non datur) il ne fait rien. Deux repos (Th. 11, 12.)
- 22° Si des efforts non composables sont inégaux, ils se détruisent l'un l'autre, la direction du plus fort étant conservée (Th. 1, 2, 3)
- 23° Si les efforts non composables sont égaux, les deux directions se détruisent mutuellement, c'est-à-dire que les corps en suivent une troisième intermédiaire, si elle existe, en conservant la intensité de l'effort (Th. 7, 8)
- «Hic est vetus apex rationalitatis in motu» car le choix d'une nouvelle direction a quelque chose d'intelligent, et ne résulte pas des données de la nature.
- 24° Nihil est sine ratione. Corollaire: Il faut changer le mouvement possible; choisir le milieu entre les extrêmes, ajouter à l'un ce qui manque à l'autre pour qu'un bon mouvement ne perde rien, etc. (ces principes régissent aussi la science civile.)

Théorie motus abstracte definitiones.

Un corps qui se meut en touche un autre, ou ne le touche pas.

1° Il le touche, s'il n'est pas borné d'espace intermédiaire; si, le touchant, il se meut, ou il passe devant, ou il le pousse;

2° Il passe devant, si en continuant son mouvement il ne déplace aucune partie de l'autre;

3° Il le pousse, s'il en déplace une partie, ou le choque, s'il le fait mouvoir.

4° Il pousse le tout, s'il déplace l'autre corps tout entier;

5° Il pousse une partie, dans le cas contraire.

6° La ligne du mouvement est celle qui décrit le centre du mobile; la ligne d'impulsion est celle qui décrit le centre du corps qui pousse.

7° La mesure de la ligne du mouvement est cette ligne elle-même si elle est droite, ou cette ligne rectifiée, si elle est courbe.

8° Quelque la ligne du mouvt. du choquant joint l'extrémité de la ligne du mouvt. du choque, ou bien elle la joint en un autre point.

9° Dans ce dernier cas, le choquant est dit rencontrer le choque, et le choque passe devant le choquant (*proterehit*).

10° Dans le premier cas, tous deux sont dits choquants, et *concurrents*.

11° *Occursus*, quand la mesure de la ligne du mouvt. de l'un ^{prolongue} touche sur le côté de l'arrivée de l'autre.

12° *Accursus*, dans le cas contraire.

13° L'*occursus* est *droit*, si la mesure de la ligne du mouvt. fait un angle dr. avec le côté de l'arrivée de l'autre, ou coïncide avec la mesure de la ligne du mouvt. de l'autre.

14° *Oblique*, dans le cas contraire.

15° L'*accursus* est *droit*, si la mesure de la ligne du mouvt. est parallèle au côté de l'arrivée de l'autre, ou fait un angle droit avec la mesure de la ligne du mouvt. de l'autre;

16° *Oblique*, dans le cas contraire.

17° Le côté de l'arrivée (ou de la vue) est la droite (ou le plan) dont la mesure de la ligne du mouvt. part perpendiculaire du côté du choc.

18^e L'Arc est central, si la ligne du moment du chocant passe par le centre du corps choqué;

1890 Excentricus, dans le cas contraire

20° Un corps racé l'autre, quand on mesurent la cote est le dipt l'aut pas à le dipt l'aut entier (soit en passant deux soit en le chaguant de cote). Les extrémités (termines) du corps sont soit des surfaces, soit par un côté un point ou un point d'un deux. Soient testes &

2^o Un corps est constitué par des parties qui doivent rester éternellement unies. Les autres se séparent.

220 ^{constitués} elles sont cohérentes, si l'une d'elles n'est que l'autre se me
trouvent ^{de} en droit en courbe (ou

230 Plexion return changement ~~cette~~ d'act en com-
but ~~de l'act~~ par le touché par u.

2^{de} Face est toute extrémité qui peut du corps (un
(corps) ^{suivant} ~~en~~ une seule ~~direction~~ ^{direction} et qu'une seule droite peut
s'inscrire, (d'agit-il d'un plan ?)

25° Directe, est une cohésion que ne peut surmonter un feu


26° Piqure simple est celle dont toute face est enfoncée de
tirage ou surface (?)

27. Une ligne ou surface unigue est celle qui peut être décrite par un seul mouvement.

28° Un seul mouvement est successif, l'itération continuant, c'est par lui-même, aucun ^{impulsion} extérieur.

2^{go} Corps rotiforme est celui qui peut se mouvoir sans
de lui ~~(corps de révolution)~~ C'est le seul mou-
qui puisse exister dans le plein (ch. partié devant ou
la place d'un autre partié.)

Théorèmes.

- 1^o Si un corps en choque un autre, soit au repos, soit se mouvant plus lentement (dans le même sens ou en sens opposé) et le même avec lui (dans la même direction) avec la différence des vitesses.
- 2^o Si l'incursseur se meut plus lentement que le pratoroches, et le choque centralement, le pratoroches le même avec lui avec la différence des vitesses.
- 3^o Si ~~le choqueur~~ ^{l'incursseur} choque centralement un corps avec une vitesse supérieure ~~le choque~~ il le même avec lui avec la diff. des vitesses.
- 4^o Si l'incursseur et le pratoroches ont la même vitesse, ils se mouvront comme des ~~concurrents~~ ^{concurrents} corps qui concourent sous un certain angle avec la même vitesse (v. Th. 7.)
- 5^o Si le pratoroches choque se meut autour de son axe propre, il sera à la fois choqueur et choqué; il retiendra son mouvement et recura le mouvement de l'autre.
- 6^o Si le choc est excentrique, ~~le choqueur~~ ^{après le choqué est copieux} le choqué ~~adherera au choqueur~~ et continuera son mouvement, et laissera au choqueur son ~~propre~~ ^{propre} mouvement antérieur, en lui ajoutant un mouvement (de rotation) autour de son axe propre, de même vitesse que le mouvement du choc au lieu du choc.
- 7^o Si deux corps concourent avec la même vitesse (v. Th. 4.) et font un angle (accursus, non occursus rectus) et si cet angle a une bissectrice , ils se mouvront ensemble après le choc suivant la bissectrice extérieure à l'angle, et avec la même vitesse qu'auparavant (?).
- 8^o Il s'ensuit que les angles de incidence et de réflexion ne sont pas toujours égaux; dans notre cas, au lieu de deux corps (sont incidents) ^{concurrents} ~~mutuellement~~ plus réfléchis après le choc, le plus petit des deux angles (de incidence et de réflexion) est le ^{com}plémentaire du double de l'autre.
- 9^o Le seul angle de incidence qui soit égal à l'angle de réflexion est l'angle de 30°.

10° Les angles de incidence et de reflexion ne doivent pas être comptés à partir de la surface où le choc a lieu, mais à partir de la droite menée par le point du choc perpendiculaire à la direction de la ligne du mouvement du choqué, ou parallèle à son côté d'arrivée.

11° Si deux corps concourent avec la même vitesse suivant des arcs de cercle semblables et égaux, ils continueront en ligne droite.

12° Si l'angle n'a pas de bissectrice (càd si les lignes du mouvement sont une droite et une courbe, ou deux courbes inégales & dissemblables) et si les deux corps se choquent avec la même vitesse, ils resteront en repos. (?)

13° Les parties non choquées, la cohésion cessant, continueront leur mouvement par où elles pouvaient.

14° Si l'on donne un angle, mais non bissectable, les deux corps en en repos (sauf l'exception du Th. 11.)

15° Les forces de la nature corporelle ne donnent aucune flexion exactement géométrique, c'est à dire suivant la ligne de moindre ^{extension} ~~flexion~~.

16° Huty a pas de corps le plus durable, parce qu'il n'y a pas de mouvement le plus rapide.

17° Deux parties contiguës d'un corps sont cohérentes, si elles se pressent, ou si le mouvement du corps est tel qu'il les presse l'une l'autre (conséquence du fondement 15°) (16°) Principe de toute cohésion.

18° Un corps qu'on ne presse ou ne choque qu'en un point, si on le presse ou le choque en un autre point, il passera par le point où on le presse ou le choque, et tous ceux qui adhèrent à ce point.

19° Huty a jamais cohésion en même temps sur toute une face d'un corps. (?)

20° Un corps en repos n'a aucune cohésion.

21° Un corps discontiguë n'existe plus qu'un contiguë.

22° Si il n'y a pas de vide, il n'y a pas de mouvement rectiligne ni de mouvement qui ne revienne par sur soi-même.

23° Dans un corps contiguë, la longueur (suivant la ligne du mouvement) est indifférente.

24° Dans un corps cohérent ou continu la largeur non plus n'importe pas.

La mesure des angles d'incidence et de réflexion est bizarre et bien conventionnelle, attendu qu'il prend pour base le plan normal à la trajectoire du corps choqué au point du choc (Th. 10). Soit XY ce plan (ou sa trace sur le plan ~~de l'incidence~~ ^{plan} AOB , où se trouve nécessairement O).

Soient AO, BO les trajectoires des deux corps avant le choc en O , OC leur trajectoire commune après le choc.

L'angle d'incidence est : $i = \angle AOX$;

L'angle de réflexion est :

$$r = \angle COY,$$

~~par rapport~~ en considérant le corps B comme le choqué (exception au précédent).

Soit 2α l'angle des deux trajectoires avant le choc : $\angle AOB$; OC est le prolongement de la bissectrice OD de cet angle ; chacun des angles $\angle AOD, \angle BOD$ est donc égal à α . On a d'après la figure :

$$\alpha = r + i$$

$$2\alpha = 90^\circ + i$$

En éliminant α entre ces 2 équations, on trouve la relation :

$$i + 2r = 90^\circ$$

qui montre que l'angle d'incidence est complémentaire (en langage moderne) du double de l'angle de réflexion. C'est ce que dit Leibniz (Th. 8), à cela près qu'il parle de celui des deux angles qui est le plus petit (inter minor est) tandis que la proposition est toujours vraie de l'angle de incidence.

Les théorèmes 7 (et 8), 8, 9, 10, 11, 12, supposent, non seulement que les deux corps ont des vitesses égales, mais encore qu'ils ont des masses égales (ce qui n'est pas exprimé).

même lorsqu'il est le plus grand ($i > r$)

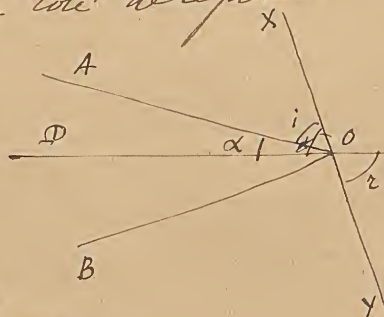
On voit en même temps que les angles de incidence et de réflexion peuvent être égaux que si : $i = 30^\circ$ (Th. 1)

Il suffit de faire $i = r$ dans la formule, pour trouver
pour trouver le résultat (Dans ce cas, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$)

Nous avons supposé que le plan XY passait dans l'angle AO
Supposons maintenant qu'il passe en dehors, c'est-à-dire que AO
et OB soient d'un même côté de ce plan.

Par suite, AO et OC

sont de part et d'autre
de ce plan au lieu d'être
du même côté. Les
formules deviennent :



$$r = \alpha + i \quad \text{ou} \quad \alpha = r - i$$

$$2\alpha + i = 90^\circ \quad \text{ou} \quad 2\alpha = 90^\circ - i$$

On voit qu'il n'y a de différence entre les précédentes en changeant le sens
des. On devra donc considérer cet angle de incidence comme
positif ou négatif suivant qu'il se trouvera, par rapport
au plan XY, du même côté que l'angle r ou du côté opposé
c'est-à-dire suivant que l'angle AOB sera obtus ou aigu (obtus
ou accusés). (1)

Moyennant cette convention de signes, l'eq. 8 sera en-
vrai; c'est-à-dire qu'on aura, en prenant la valeur absolue de

$$2r - i = 90^\circ$$

Il est d'ailleurs évident que dans ce cas on a toujours :

$$i < r$$

La formule de Leibniz (« inter minor ») est donc juste
dans ce cas, mais non quand i est positif et supérieur à
car alors : $i > r$ (Remarque : L'application des angles ne s'applique pas dans ce cas, car
pour $i = -30^\circ$, $r = 60^\circ$.)

(1) L'angle de incidence est nul quand AOB est un angle droit
de l'angle accusés rectus.)

Hegel, Logique, tome II:

Première Partie: la Science de l'Être:

A. Qualité. B. Quantité.

§ XCIX: a. La quantité pure

La quantité est l'être pur où la déterminabilité n'est plus posée comme ne faisant qu'un avec l'être lui-même, mais comme indifférente & distincte.

1° Le mot grandeur n'exprime pas d'une manière adéquate la quantité, mais seulement la quantité déterminée.

2° Les mathématiciens définissent ordinairement la grandeur & ce qui peut être augmenté ou diminué. Bien que cette définition soit defectueuse, parce qu'elle contient le défini, cependant les déterminations de la grandeur y sont représentées comme indifférentes à la chose, comme pouvant changer d'intensité ou en extension, sans que la chose (une maison, la couleur rouge, par ex.) cesse d'être une maison, ou la couleur rouge.

3° L'absolu est la quantité pure.

§ C: — La quantité, dans ce rapport immédiat avec elle-même ou dans cette détermination d'égalité avec elle-même qui a été posée par l'attraction, est quantité continue; mais comme d'un autre côté elle contient la détermination de l'un, elle est

quantité discrète. Mais la quantité continue est, en même temps, quantité discrète, parce qu'elle est que la continuité de plusieurs, et la quantité discrète est en même temps quantité continue, parce que les uns qui forment la discrétion sont identiques, et constituent par conséquent une unité. D'où il suit

1^o Que la grandeur discrète et la grandeur continue doivent par être considérées comme formant deux espèces distinctes de grandeur. Car elles sont deux déterminations d'un seul et même tout ;

2^o Que l'autonomie de l'espace, du temps, et de la matière touchant la divisibilité infinie ou l'indivisibilité de leurs éléments, vient de ce que, dans le premier cas, la quantité est considérée comme continue, et dans le second, comme discrète. Si l'on ne pose le temps, l'espace, etc. qu'avec la détermination de la quantité continue, ils sont divisibles à l'infini. Si on ne le pose qu'avec la détermination de la quantité discrète, l'on arrivera à une dernière division, car ils seront composés d'unités indivisibles. Mais l'une des deux déterminations est aussi incomplète que l'autre.

(Voir la Grande Logique, p. 246 sqq.)

B. Quantum.

§ CI. — La quantité posée avec une déterminabilité essentielle, qui exclut toutes les autres, c'est le quantum ou quantité limitée.

§ CII : La quantité limitée reçoit sa détermination et son développement complet dans le nombre (Zahl) qui a pour éléments l'un, et qui contient, comme moments qualitatifs, la quantité discrète dans les nombre particuliers (Anzahl) et la quantité continue dans l'unité (Einheit.)

[Dédution des 3 opérations arithmétiques.]

c. Le degré.

§ CIII : La limite est devenue identique avec la quantité totale du quantum. Par conséquent, comme discrétibilité multiple, la quantité constitue la grandeur extensive; comme discrétibilité simple, la grandeur intensive ou le degré.

Remarque. Ce qui distingue la grandeur continue et la grandeur discrète de la grandeur extensive et de la grandeur intensive, c'est que la première s'applique à la quantité en général, et la seconde à ses limites.

De même que la quantité continue et la quantité discrète, la quantité extensive et la quantité intensive ne sont pas deux espèces de quantités, dont l'une contiendrait une détermination qui ne se trouverait pas dans l'autre. La grandeur extensive est en même temps une grandeur intensive, et réciproquement.

§ CIV: C'est dans le degré qu se réalise la notion de la quantité déterminée. Le degré, c'est la grandeur qui est dans un état de simplicité et d'indifférence, de telle façon cependant que la détermination qui la fait une quantité limitée, elle la trouve hors d'elle, dans une autre grandeur. Il y a ici une contradiction, qui consiste en ce que ~~la~~ limite indifférente et existant pour soi est l'extériorité absolue. Le degré est une quantité immédiate qui appelle immédiatement son contraire, une médiation, et qui va au delà de la quantité qui l'on a posée. C'est là ce qui constitue le progrès infini quantitatif.

Remarque Par conséquent, le quantitatif non seulement peut être augmenté ou diminué à l'infini, mais il d'après sa notion, il doit toujours aller au delà de lui-même. Le progrès infini est ~~un~~ retour inflexible de un seul et même contradiction, qui, dans la quantité déterminée, se réalise sous la forme de degré. Toutefois, au fond, il dispense de se représenter cette contradiction sous la forme d'un progrès infini. Et à cet égard nous rappellerons le mot si fort de Leibniz dans Aristote: « qu'il n'y a pas de différence entre dire une chose une seule fois et la répéter toujours. »

[cf. Grande Logique, livre I, part. 2, p. 293-379, une exposition critique du calcul de l'infini.]

Hermann Schwarz: Versuch einer Philosophie der Mathematik verbunden mit einer Kritik der Aufstellungen Hegel's über den Zweck und die Natur der höheren Analysis. Halle, 1853.

§ CV: Cette propriété qu'a la quantité d'être en elle-même et hors d'elle-même fait sa qualité. Par là se trouvent réunies l'extériorité, c'est-à-dire le quantitatif, et l'être pour soi, ou qualitatif.

La quantité ainsi posée forme un rapport quantitatif, rapport où elle est à la fois quantité immédiate, (exposant) et quantité médiante, c'est-à-dire rapport avec une autre quantité. Car les deux termes d'un rapport n'ont pas une valeur immédiate, mais une valeur qui leur vient de leur rapport même.

§ CVI: Les deux termes du rapport sont encore des quantités immédiates, et les deux déterminations, la qualité et la quantité, ne sont liées que par un rapport extérieur. Mais comme, au fond, la quantité contient deux éléments, un rapport avec soi-même et un rapport extérieur, ce lien pour soi et les différences à toute détermination, elle est devenue la mesure.

§ CVII: La mesure est la quantité qualitative, et d'abord elle est une quantité immédiate qui a une existence déterminée, ou une qualité.

§ CVIII: Comme la mesure réunit la qualité et la quantité dans une unité immédiate, la différence de la qualité et de la quantité se produit aussi dans la mesure d'une manière immédiate. La quantité



spécifique est, d'une part, une pure quantité, et elle peut être diminuée ou augmentée sans que la mesure, en tant que règle, soit pour cela détruite, et d'autre part, le changement de la quantité entraîne le changement de la qualité.

§ CIX: Le changement de quantité qui fait qu'une mesure perd la détermination de sa qualité, amène d'abord la suppression de la mesure. Mais comme dans ce rapport quantitatif, auquel donne naissance cette suppression, est aussi un rapport qualitatif, la suppression de la mesure produit une mesure nouvelle. Le passage de la qualité dans la quantité, et de celle-ci dans la première, peut être aussi représenté comme un progrès infini, où la mesure se trouve à la fois supprimée et rétablie.

§ CX: Ce qui a lieu au fond de ce mouvement, c'est que la forme immédiate de la mesure, comme telle, est détruite. La qualité et la quantité elles-mêmes se trouvant d'abord dans un état immédiat, et la mesure n'était que leur identité relative. Mais dans la mesure se produit la nécessité de la suppression de la mesure, et cette suppression qui est la négation de la mesure, amène l'unité de la qualité et de la quantité, ainsi que l'unité réfléchie de la mesure elle-même.

Cf. Grande Logique, livre I, § III, ch. I; Philosophie de la Nature, § CCXLVII 399.

§ CXI. L'infini, l'affirmation, autant que négation de la négation, contient maintenant, au lieu des termes abstraits, l'être et le néant, l'un et le multiple, etc., la qualité et la quantité. A. D'abord, la qualité est posée dans la quantité (§ XCVIII) et la quantité dans la qualité (§ CV), et, par conséquent, elles se sont produites comme des négations. B. Dans la mesure qui fait leur unité, elles se sont d'abord différenciées, et l'une n'est que par l'intermédiaire de l'autre. C. Enfin, la forme immédiate de cette unité disparaît, et par là cette unité se trouve posée, telle qu'elle est en soi, c'est-à-dire comme formant un rapport simple avec elle-même, rapport qui enveloppe et supprime à la fois l'être, ainsi que ses formes. L'être immédiat, qui, dans la négation de lui-même, a posé un moyen terme pour se mettre en rapport avec lui-même, moyen qui s'est effacé pour produire ce rapport, et par conséquent un nouvel état immédiat, cet être est devenu l'essence.

Deuxième Partie de la Logique:

La science de l'essence.

Renouvier
(Critique de l'infini.)
Cauchy - Moigno.
Evellin.

Renouvier.

Tableau des catégories.

Catégories	Thèses	Antithèses	Synthèses
Relation	Distinction	Identification	Détermination.
Nombre	Point (limite)	Espace (intervalle)	Étendue Totalité.
Unité	Unité	Pluralité	Étendue
Position	Point (limite)	Espace (intervalle)	Durée.
Session	Instant (")	Temps (")	Espèce.
Qualité	Différence	Genre	Changement.
Devenir	Rapport	Non-rapport	Force
Actualité	Acte	Possibilité	Passion
Finalité	État	Tendance	Conscience.
Personnalité	Soi	Non-soi.	

Tableau des facultés.

Catégories.	Fonctions humaines.
	1 ^{re} . Intelligence
	A. Entendement.
Relation	Comparaison, attention, réflexion
Unité	Numération.
Position	Imagination
Session	Mémoire
Devenir.	Pensée; série de la pensée.
	B. Raison
Qualité.	Raison, signification, jugement, raisonnement.
	2 ^e . Cœur et volonté.
Actualité.	Passion, instinct, habitude
Finalité.	Volonté, effort.
Personnalité.	Liberté.

Des antinomies mathématiques de Kant.

L'une des thèses est la contradiction inhérente au nombre infini.
Kant n'a pas attribué la même valeur aux antinomies qu'aux autres. Les premières sont contradictoires, les secondes sont seulement
inconcevables, ce qui ne veut pas nécessairement dire faux.

compréhensibles

Le principe de contradiction s'applique à la nature, les thèses
limitées sont fausses. Quant à l'inconcevabilité des thèses,
proviendrait du pouvoir illimité de l'imagination, de
l'indéfini de la faculté représentative.

Hamilton reconnaît la contradiction du nombre infini; il pose
en même temps également inconcevables la thèse et l'antithèse de chaque
infini, et cependant se croit obligé par le principe de contra-
diction à admettre l'une ou l'autre comme vraie; tandis qu'il
les déclare toutes deux fausses, en se disant le monde à
l'apparence.

Hamilton admettait l'absolu et l'infini
fori théologique; or l'absolu exige le commencement et la
fin du monde; donc il contredit l'infini.

Mill n'a pas tenu compte, en traitant de l'infini de quantité,
différence entre l'infini actuel, ou somme, et l'infini purement
relatif, ou puissance indéfinie de multiplication et de division
un objet d'imagination.

R. distingue toujours l'éternité écoutée, qui est contradictoire,
qu'il est donné comme interminable et en même temps terminée;
terminée à venir, qui est une possibilité indéfinie de prolonger
l'imagination en temps fini qu'on
la quantité infinie, c'est-à-dire plus grande que toute quantité donnée.

implique contradiction, en tant que quantité donnée, car si cette quantité est donnée, elle est déterminée, et par conséquent n'est pas sans fin. Par conséquent, l'infini paraît dans la faculté ou puissance et intellectuelle, appliquée à des possibles, et doit par là même être exclu des données et des objets réalisés, passés ou actuels, de tout. - La faiblesse de St. Mill sur la question de l'infini vient de ce qu'il ne distingue pas nettement les divers inconcevables, et ne s'affranchit pas d'une possibilité réelle du contradictoire (à cause de son empirisme). Il est porté à confondre l'inconcevable par contradiction avec l'inconcevable par manque de habitude ou d'association, les antipodes.)

- Il n'y a pas de quantité plus petite que toute quantité, car si cette quantité était donnée, par hypothèse, elle serait également donnée, en vertu de la division infinie qu'on peut faire, et par conséquent elle ne serait pas la plus petite, ce qui est absurde. Tandis que Hamilton déclarait la thèse et l'antithèse inconcevables, St. Mill les trouve toutes deux concevables pour l'infiniment petit, mais il trouve l'habitue inconcevable du côté de l'infiniment grand. (M. R. remarque que Mill, en ruinant l'argument du principe de la division, prouve l'expérience ne peut garantir une association indépendante, ouvre la porte au mysticisme métaphysique ou théologique.)

- Spencer confond toutes les sortes d'inconcevables, et pose le critérium de l'inconcevabilité de la négative & sans défiance l'inconcevabilité il s'agit. - Le fait présent est tel, que la négative est inconcevable; au fond, le critérium est un critérium. Spencer constate qu'il y a des choses que personnellement il ne peut concevoir. Son critérium est stérile, car il se borne à dire le fait de conscience tant qu'il existe.

Leibniz, qui n'admet pas le nombre infini (démontre impossible
à Galilée) admet l'infini actuel dans le monde, aussi bien
infiniment grand que infiniment petit.

Je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit,
qu'elle ne soit pas divisible, mais actuellement divisée; et par consé-
quent la moindre parcelle doit être considérée comme un monde
d'une infinité de créatures différentes. » (Dutens, II, 243)
De ce qu'il y a partout des monades,
principes de la unité substantielle, il s'ensuit que l'infini est
en acte, car il n'y a ni partie, ni partie de partie, qui
ne contienne des monades. » (Dutens, II, 265; cf. 298)

Leibniz croit résoudre le schisme en alléguant qu'un espace
infini sans fin se passe et s'épuise dans un temps également
infini sans fin. (Dutens, II, 238) A quoi M. Renouvier
répond que cette double infinité ^{parallèle} n'est pas plus facile à épuiser ou
passer que l'infinité simple.

Les arguments contre l'infini en acte supposent qu, dans le cas
où on admettrait un tel infini, un nombre infini serait donné;
et que tous les infinis sont égaux. Mais il faut savoir qu'en
un agrégat infini n'est pas un seul tout, n'est pas don-
né, ne consiste pas en un nombre. A parler exactement,
il faut par dire qu'il y a un nombre infini, mais bien qu'il y a
des choses qu'on n'en peut exprimer par aucun nombre;
même, au lieu d'un infini, il faut parler d'une droite
qui au-delà de toute grandeur assignable, tellement que
la droite soit toujours plus grande. » (Leibniz, lettre à Des Bosses)

« En voilà assez... pour donner satisfaction aux arguments
l'infini actuel, arguments qui peuvent porter aussi à leur
contre l'infini potentiel; car on ne saurait nier que les nombres
tous les nombres possibles ne soient donnés, au moins dans
l'ordre divin, et qu'ainsi la multitude des nombres n'est
(Deutens II, p. 267; cf. p. 272)

Plein qui touchant le nombre infini;

Leibnizii et Johannis Bernoulli commercium philosophicum
et mathematicum. Lausanne et Geneva, 1748 (I)

« J'accorde une multitude infinie, mais cette multitude
pas un nombre ou un tout. Elle signifie seulement qu'il
plus de termes qu'il n'en peut être désigné. C'est ainsi qu'une
multitude est donnée, enveloppant tous les nombres, mais
multitude n'est ni un nombre ni un tout. »

Objection de M. R. que la série des nombres soit sans fin
toujours, et cela est, si les nombres ne sont que la série des
Mais que la série des monades données soit corrélativement
sans fin, cela est absurde: des unités données forment
et un tout, quelque immense qu'on le suppose.

Extrait de la
Critique philosophique, tome X (1876, - 2.)

de couvrir: Les labyrinthos de la métaphysique: L'infini et le
continuum. Les mathématiciens. p. 26.

[Critique philosophique, t. XI; 1877, 1.]

^{aussi implique-t-il une infinité nécessaire, d'après la notion même.}

«Le critérium mathématique consiste en une pure possibilité,
comme les nombres.» (Substitution du potentiel à l'actuel)

en admettant pas plus de grandeurs infiniment petites que
infiniment grandes, jetant les unes et les autres pour des
manières abrégées de parler, dans le intérêt des fictions de l'esprit,
servant au calcul.» (Dutens, II, 305, 267.)

^{telles que sont les racines, imaginaires en algèbre.}
«On conçoit un dernier terme, un nombre infini au infiniment
petit, mais tout cela ne sont que des fictions. Tout nombre est fini
assignable, toute ligne est de même, et les infinis au infiniment
petit ne signifient que des grandeurs qu'on peut prendre pour
grandes ou aussi petites qu'on voudra pour montrer qu'une
est moindre que celle qu'on a assignée, c'est à dire qu'il n'y
a aucune erreur.» (Theodoricus n° 70.)

Les incomparables pouvant être pris aussi petits qu'on veut dans
les raisonnements géométriques, tout l'effet des infiniment petits
n'est, puisqu'un adversaire voulant contredire à notre
raison, et s'en servir par notre calcul que l'erreur sera moindre
qu'une erreur qu'il pourra assigner; tout en notre pouvoir
de rendre cet incomparablement petit aussi petit pour cela, puisqu'on
peut toujours prendre une quantité aussi petite qu'on veut... C'est
donc en cela que consiste la démonstration rigoureuse du calcul
differential dont nous nous servons.» (Lettre à Varignon)

Dutens, t. III, p. 370.)
cf. Dutens, t. I, p. 267)

Pour M. Renouvier, le calcul infinitésimal est une méthode
d'approximation indéfinie.

Deux reproches adressés à la méthode des limites :

1^o Considérer comme existants des rapports entre des
évanouissantes qui n'existent plus à la limite ;

2^o Considérer comme atténués (dans l'évaluation de la
des courbes, par exemple) des limites qui ne peuvent être atténuées
identifier les courbes à des polygones contrairement aux définitions
regarder comme des nombres effectifs les résultats impossibles
d'opérations définies comme interminables -

- On a essayé de perfectionner la méthode en substituant
des définitions verbales aux identifications anciennes : on dit
l'appelle longueur d'une courbe la limite vers laquelle tend
longueur de tout périmètre polygonal variable. Mais...
des définitions nominales ont pour effet de marquer les différences
et nullement de les résoudre.

Sur la rectification des courbes. La limite géométrique d'un
polygone n'est pas un polygone, on ne peut donc la mesurer
un polygone. D'autre part, la mesure du polygone a une
mais cette limite n'est pas la mesure d'un polygone, puisqu'un
polygone possible est avant la limite.

Impossibilité de concevoir les rapports entre incirconscrits.
Les arcs et longueurs curvilignes ne sont mesurables que
un parti pris de définir nominalement ces arcs ou ces longueurs
par des limites de polygones - M. R. admet que cette façon de
est irréprochable.

Il ne faut pas dire qu'en mesurant un polygone on donne une
valeur approchée de la longueur de la courbe où il est inscrit;
isque la valeur vraie est inassignable et in-mesurable;
il faut dire que c'est le polygone (seule figure véritablement
curvée et mesurable) qui est approché.

Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre incom-
mesurable. Il faut dire: est incommensurable, n'est point un nombre,
le rapport à la longueur, enfin n'existe pas (!)

L'approximation arithmétique des mesures géométriques, dans les
incommensurabilités, ne se rapporte pas à des valeurs fictives,
la fiction est contradictoire, incompatible avec les notions claires
de rapport et de nombre; mais cette approximation porte en réalité
sur figures et substitue à certains propos.

Le « nombre π », sous ce point de vue, n'est plus un nombre

(!) mesurant la longueur d'une circonférence qui a pour
diamètre limite linéaire, mais bien un nombre indéterminé (!)
choix de la longueur du périmètre d'un certain polygone inscrit,
le rapport diffère du rayon de moins qu'une longueur
quelque petite qu'on lui assigne.

Lebniz y répondait (à l'objection que son calcul n'était qu'approché)
d'assigner une erreur commise quelque-
que celle-ci étant assignée, et quelque petite qu'on la supposât,
on pourrait aussitôt prouver qu'elle n'aurait pas trop grande. On ne la
peut donc comprendre cette espèce de réduction à l'absurde: elle nous
paraît pourtant rigoureuse, plus rigoureuse que celle n'eût pu être
de l'absence de la pensée d'une approximation indéfinie. ...

Malebranche admet des infinis actuels, et des rapports finis,
(Méditations chrétiennes, IV, art. 11, Recht der Wahrheit, livre
Bordas-Demoulin, Le cartésianisme, ou la véritable science
des sciences, (1843); Théorie de la substance; Théorie de l'esprit

Lettre de M. Boirac (n° du 26 avril 1877)

Le nombre infini est sans doute contradictoire; tant qu'il
s'agit que de ~~choses possibles~~, on concevait que l'esprit finisse
~~sans fin~~. Mais s'ensuit-il qu'il ne puisse exister dans la
des collections qui ne forment pas de nombre? Ces multitudes
seraient inépuisables et sans nombre; elles seraient actuelles.

Il n'y a pas, semble-t-il, de contradiction entre pluralité et
— Réponse de M. Pilon: — Le nombre est la loi de toute épreuve
de toute pensée. Toute pluralité est un nombre, inconnu peut-être
mais donné dans sa totalité. L'esprit découvre le nombre
crée point. Une collection indéterminée est un nombre ^{en} qui
inconnu, mais connaissable. — Elle ne devient pas subjective
qu'elle était, au moment où elle est nommée.

Pourquoi la série des événements passés n'est-elle pas immuable?
Parce que chaque événement passé forme une tout réel, momentané.
La série des événements futurs, série de pures possibilités,
indéfinie; la série des événements passés, série de réels
est nécessairement finie; car toute pluralité ou collection
composée d'unités réelles est un nombre.

(1) Dans l'hypothèse d'un infini actuel, l'esprit trouverait des aut.
former indéfiniment des nombres, de même qu'il trouve ordinairement
les collections finies de quoi former des nombres jusqu'à une certaine

Renouvier, ap. Critique philosophique, t. XI, 1877, 1.

Note sur l'infini de quantité.

(10 mai, n° 15.)

Definitions.

1. J'appelle chose donnée une chose quelconque susceptible d'être distinguée des autres de même ou de différente nature, dont l'existence peut se définir, soit dans l'espace, soit dans le temps, soit simplement dans la pensée.

Une collection ou multitude donnée est une coll. ou mult. de choses données.

2. J'appelle infini actuel, une collection donnée quelconque, et on supposerait que les parties distinctes ou éléments, considérés dans leur assemblage unidrique, ne répondent à un certain nombre n , et cela quel que soit n , ou à une grandeur qu'il puisse atteindre.

Par opposition à l'infini actuel, l'infini des possibles que l'on nomme l'indéfini.

3. S'il s'agit de la suite des nombres abstraits : 1, 2, 3, ...

J'appelle infini actuel, et non pas seulement indéfini, dans la supposition où, étant conçu par une intelligence dont l'acte d'énumération effective serait, par hypothèse, sans limites, cette suite serait représentée dans cette intelligence, tout à la fois comme collection effective (donnée), et comme un assemblage d'éléments ne répondant pas à un certain nombre n , quelque grand que fût n .

Propositions.

1. Une collection donnée in concreto est toujours telle, qu'il n'est pas de l'entendement, sans laquelle l'exercice de la sensibilité, toute expérience sont impossibles, on puisse distinguer, nommer, assembler les objets de cette collection, et cela, soit que la suite doive se terminer ou ne puisse pas se terminer effectivement.

2. Dans l'hypothèse où la numération serait interminable, toujours établir le parallélisme de la suite des concrets descriptifs, la suite des nombres abstraits $1, 2, 3, \dots$ puisque ces abstraits correspondent à ces concrets chacun à chacun, nécessairement la suite de ces abstraits est infinie et ne peut faillir, et la multitude de ces concrets s'étend.

[Les nombres ne sont que de purs possibles, en tant qu'ils n'ont pas de contradiction à les supposer tous donnés... Le concept de possibilité infinie est ce qu'il y a de réel dans l'idée de l'infini.]

3. Il résulte de la proposition précédente que, au cas où l'on pourrait démontrer que l'hypothèse de l'infini actuel de ces abstraits est une hypothèse contradictoire en soi, et sera par la même que l'hypothèse de l'infini actuel de la suite des concrets est une hypothèse contradictoire en soi. En effet, si l'un des concrets ne peut devenir actuel que celui des abstraits devienne pareillement. Si le premier s'accomplissait sans que le second n'arrivât pas à se clore ensemble, certainement correspondu, c'est, dans notre supposition, des abstraits qui, ne pouvant être donnés ad integrum, qu'en un certain nombre n , contrairement à la définition.

4. L'hypothèse de l'infini actuel de la suite des abstraits
contradiction en soi. Cette impossibilité du nombre infini,
une fois exprimée, peut se démontrer de plusieurs manières.
voici une très-simple:

Si la suite des abstraits: 1, 2, 3, etc. est infinie actuelle, elle
renferme actuellement autant de termes pairs qu'elle renferme
actuellement de termes, attendu que chacun de ses termes, quel
qu'il soit, peut être doublé, et que son double est un nombre pair,
également existant dans la suite de tous les nombres. Mais,
autre des pairs, cette suite renferme des impairs en nombre égal
à l'infini. Donc cette suite renferme plus de termes et infiniment
plus de termes qu'elle n'en renferme, ce qui est une contradiction
terminée.

5. L'infini actuel de toute collection ou multitude de
dominés, devant suivre le sort de l'infini actuel de la suite
des nombres abstraits, ne peut être supposé sans absurdité. D'au-
tant que des êtres ou phénomènes quelconques, susceptibles d'être
groupés les uns des autres dans l'espace, dans le temps, dans la
manière, ou les uns et les autres multipliés idéalement, ne peuvent être supposés
sans que leur ensemble soit supposé numériquement d'être
infini en soi, encore que les moyens de les grouper nous fassent défaut.
La série écoutée des phénomènes distincts de l'univers a donc eu
un commencement, sans quoi leur réunion actuellement effective
serait infinie actuelle, et leur extension et dissémination effective,
qu'on les envisage dans l'espace ou dans le temps, sont toujours
finies, car tous ceux qu'il est possible de concevoir existants et distincts
sont finis par leur réunion en tant qu'unis au nombre d'éléments.

Extrait de la Revue philosophique, tome IX, page 67.

Si des phénomènes ou des choses quelconques forment une suite
interminable en se distinguant les uns des autres, elles
peuvent nécessairement être par une aux termes de la suite.
nombres abstraits 1, 2, 3, 4... également interminable. Une
première de ces suites pourrait se clore de manière à former une
synthèse achevée, une unité de totalité, il faudrait que nous
pressions nous représenter la seconde comme également
formant, sous le nom de nombre infini, une synthèse ad
une unité de totalité. Autrement, il est clair que la série
se poursuivant toujours, nous refuserions à la série des
le droit de s'arrêter et de se fermer, mais la correspondance
ci-dessus. Toute la question dépend donc bien de la possibilité
de l'impossibilité du nombre infini. Le nombre infini actuel
contraire in adjecto, par la raison que lui-même
implique la faculté d'augmenter un nombre donné qui
donne l'infini potentiel exclusif de l'infini actuel; il
que la même contradiction qui existe entre une suite de
sans fin et leur synthèse accomplie, qui supposerait
épuisée.

Suivant M. Lotze, c'est l'infini donné ou actuel
de pousser aussi loin qu'on le veut la synthèse des unités
moi, c'est l'infini potentiel du procédé de l'esprit dans
qui explique, mais n'autorise point la supposition d'un
antérieur et supérieur enveloppant tous les possibles, à
ne comprennent bien que cette donnée est l'esprit lui-même
série. La contradiction est le fait du philosophe qui veut qu'
soit donné sans être clos, et non de celui qui soutient qu'
être clos, elle ne peut être donnée.

Revue philosophique, tome IX.

L'infini actuel est-il contradictoire ?

L. Lotze :

Si nous continuons la série des nombres par l'addition de
l'unité, il est évident que nous ne pouvons trouver l'infiniment
grand comme un nombre, ce qui contredirait la définition
même de l'infini.

La certitude que nous avons de la valeur ou de la vérité
multitude de tous les termes de la série jusqu'à l'infini,
il a précisément en quoi consiste l'infinité donnée de la série.
C'est seulement par une méprise assez grossière que l'on peut
du cette infinité de la série pour un nombre infini, qui, s'il
avait été atteint, la rendrait close et finie.

Pour prouver que dans le prochainement de nos idées il peut se
présenter tel cas où nous devrions reconnaître l'infini comme
ici au présent dans les choses, comme possédant la même
ce que... les grandeurs finies de même espèce, j'avais parlé
tangente (trig.) dont la valeur devient infinie lorsque l'angle
s'approche de droit et la sécante parallèle à la tangente; mais j'ajoutais
cette longueur infinie n'est immeasurable, par synthèse successive
de grandeurs finies.... Elle est infinie, et non indéfinie; ~~car~~ la
sécante serait indéfinie si l'on ne savait au juste quelle longueur
elle a, si l'on ne savait s'il y a ou non un nombre pour la
mesurer. Mais elle diffère de la tangente de 0° , et est. Remarquez aussi
qu'elle n'a plus de mesure, parce qu'elle a une longueur
sans ~~avoir~~ aucun nombre, quelque grand qu'il soit, ne peut
être rapporté avec l'unité de longueur.

M. Renouvier ramène d'abord l'infini de l'espace et du
au nombre infini : puis il fait ressortir la contradiction de
« l'ordre même de nombre implique la faculté d'augmenter un
donné quelconque; donc l'infini potentiel, exclusif de l'infini

M. Lotze considère la série potentielle des nombres comme
tout actuellement donné. Un tel tout peut-il différer de
l'infini, alors que chaque terme de la série énoncé à la fois
particulière et le nombre des termes compris jusqu'à lui
dire que si le tout est une infinité donnée, comme les termes
impérissables, jusqu'à la fin de ce qui peut être donné, je suis forcé
supposer un dernier, et alors là, voudra-t-on tout à cette

Ce dernier terme est-il impossible, vu la nature de la série? Le
somme infini est elle-même impossible en tant que donné.
Les termes et la somme restent constamment identiques.

Pour la tangente de 90° , dont la valeur est infinie, il faut
le point de vue géométrique, auquel elle est une droite indéfinie
le point de vue du calcul, où la tangente n'a plus de sens
parce qu'elle a une longueur infinie dont aucun nombre, si
grand qu'il soit, ne peut exprimer le rapport avec l'unité de
Ce rapport n'existant plus, il n'y a plus de nombre, ni fin ni

On ne peut attribuer aucune valeur à cette tangente, car
on ne peut lui en attribuer aucune qui ne fût erronée d'un
qu'elle serait déterminée; et le cas est complètement différent
celui de la tangente de 0° , qui a une valeur déterminée, à

On peut parler d'une valeur infinie, pourvu qu'on n'y voie que
ou un symbole. L'erreur n'apparaîtrait que si l'on croyait qu'une
valeur se possédait la même réalité que les grandeurs finies de même
parce que cette réalité de l'infini comme donné au présent de
ne pourrait signifier pour moi la quantité infinie actuelle

Sept leçons de physique générale, par Augustin Cauchy. R. 30828.

et appendices : sur l'impossibilité du nombre actuellement infini ;
l'antiquité de l'homme ;
la science dans ses rapports avec la foi ;
par l'abbé Moigno.

Gauthier Villars, 1868.)

Préface. L'auteur de ce petit opuscule est de lui (C.) donner un bon
souvenir, de continuer son apostolat de savant et de chrétien...

Cauchy émigra en 1830, accepta en 1832 la chaire de physique sublime
offerte pour lui à Turin par S. M. le roi de Sardaigne, et vint à
Turin en 1833, appelé par le roi Charles X pour enseigner les
sciences au jeune comte de Chambord.

Il ne voulut pas reconnaître Louis Philippe pour son roi, refusa
serment de fidélité en 1831, en fut dispensé en 1832.

Sa foi. — C'était vraiment la foi du charbonnier, la foi vive et forte
d'un voyageur... C'était pas un simple chrétien, mais un apôtre,
un sauveur ou pêcheur d'hommes. (Né en 1789, mort en 1857.)

Leçon. Tout nombre est fini ; toute multitude d'êtres est finie.
Cauchy démontre l'impossibilité du nombre actuellement infini,
comme Galilée, par la considération des nombres carrés.

De même comme M. Renouvier, une multitude d'objets à un nombre
croissant les objets en ordre linéaire et en leur faisant correspondre
l'ordre des nombres entiers.

Il argumente d'appliquer à des séries successives comme aux séries
arithmétiques. Ainsi, non-seulement le nombre actuel des étoiles est
fini mais le nombre de toutes celles qui ont existé est fini ; de même
le nombre des hommes qui ont existé, le nombre des révolutions terrestres
etc. — « Ainsi la science nous ramène à ce que la foi nous enseigne »
Cauchy cite le P. Gerdil.

L'infini, l'éternité sont des
« En résumé, Dieu seul est infini, hors de lui tout est fini.
« L'homme est immortel, ^{mais} non pas éternel. L'éternité qui n'est
que l'absence de fin, qui croît continuellement et au delà de
toute limite assignable. Mais si, à un instant quelconque de cette
existence, il arrête sa pensée sur le temps écoulé depuis qu'il a commencé
d'exister, jamais il ne pourra dire que ce temps soit devenu infini.
Cauchy cite la Genèse, comme la première et la plus ancienne
des livres. » - Préoccupation constante de s'accorder avec
la science, et de rendre vraisemblables même les miracles de la
Bible. « Il y a même dans la nature, des vérités qui surpassent notre intelligence
et des mystères qu'en ce monde il n'est pardonné à l'homme de
ne pas comprendre. L'étendue et la figure sont des attributs des corps. L'espace
par lui-même; Dieu réalise l'espace en créant les corps.
L'espace réel est fini. Nature réalise le point mathématique.
Cauchy semble mesurer les longueurs rectilignes par le nombre
qu'elles contiennent. Il définit d'autre part la longueur d'une
courbe limitée, etc. - Comment concilier-t-il ces 2 définitions?
Comment concilie-t-il son atomisme avec les incommensurables.
Les volumes sont proportionnels aux nombres d'atomes qu'ils contiennent.
Relativité des dimensions: si les longueurs varient toutes dans
le même rapport, les angles restent les mêmes, rien ne serait changé.
Cauchy n'admet pas l'infini de l'espace parce que l'infini
appartient à Dieu seul, et qu'il est indivisible.
Affirmer l'existence d'un point math. c'est affirmer la possibilité
de la création d'un atome par Dieu en ce point.
« Le triangle qui est pour nous le symbole du seul être nécessaire,
Dieu, unique ou trois personnes, » est le fondement de toute
conception de l'espace car tout point peut être rapporté à 3 points fixes.
« On pourrait dire que les points mathématiques, les distances,
et les volumes subsistent à la manière des nombres. Ainsi, une distance
réalisée par la création de 2 atomes, comme le nombre cinq
réalisé par la création de 5 objets divers... »

distances des atomes sont déterminées par leur attraction ou
répulsion mutuelles, en ce sens qu'elles cessent d'être relatives et
viennent absolues: car pour une distance déterminée la force
est nulle (en passant de la répulsion à l'attraction.)

On ne peut admettre la création simultanée d'un n infini d'atomes.
Pour obtenir un nombre infini d'atomes coexistants, il suffirait
d'admettre la création simultanée de tous les atomes que peut
faire la toute-puissance divine. Mais cette dernière hypothèse est
évidemment absurde et entraîne une contradiction manifeste.
Si elle était admise, la toute-puissance divine se trouverait
d'une sorte épuisée, et Dieu ne pourrait plus benéficier en créant de
nouveaux atomes, ce qu'il serait ridicule de soutenir. »

« Nous ajouterons ici une dernière remarque:
l'espace occupé par l'univers fut réalisé, comme nous l'avons déjà
dit le premier jour de la création, et instantanément par l'œuvre de l'Éternel
répandre de toutes parts la lumière, ce fluide subtil qui remplit les espaces
et pénètre tous les corps. » Fin

« Le nombre actuellement infini est impossible; tout nombre
est essentiellement fini. La suite des nombres est infinie. »

« d'une part, que les témoignages du Seigneur sont croyables
en ce qu'ils nous aurions pu désirer, *testimonia tua credibilia*
sunt mihi; que le dogme capital de la création est un simple
fait de la science des nombres, que l'athéisme et la négation
évidente mathématique, etc; de l'autre part, que l'incrédulité
pas dans l'intelligence, mais dans la volonté ou le cœur, qu'elle
est conséquemment inexorable; qu'elle est moins un malheur qu'une

« Jovi répond: « L'univers n'est point une somme d'unités séparées
et abstraites, il n'est point discontinu; il n'est donc pas un nombre,
et doit être infini. »

« Les dévots de continence d'un infini de M. Jovi, insistent que
l'inséparabilité de l'être infini de nos dogmes chrétiens. »

Cauchy, fin de la 2^e leçon : (le savant)

« Premièrement, il doit soumettre les fruits de ses veilles à l'autorité des autres savants,

» Secondement, il doit rejeter sans hésiter, toute proposition qui serait en contradiction avec les vérités révélées. Ce point n'est ni activé par dans le intérêt de la religion, mais dans celui des sciences, puisque jamais la vérité ne saurait se contredire.

Evellin, *Infini et quantité*. Paris, G. Baillière, 1880.

Deuxième partie: L'infini dans la nature.

Ch. I: L'idole de l'infiniment petit et la matière.

§ II: Contradiction du nombre actuellement infini.

Qui dit nombre dit quantité et par suite chose susceptible d'augmentation et de diminution. Or, s'il est actuel, l'infini ne saurait être ni augmenté ni diminué.

Un nombre qui serait supérieur à tout nombre imaginable ne serait point un nombre, car s'il le était, il pourrait, comme tout autre nombre, être augmenté d'une unité.

Le nombre infini appartient-il à la suite naturelle des nombres entiers? Si oui, il ne diffère du précédent que d'une unité, et par suite il est fini comme lui. Sinon, qu'est ce qu'un nombre qui n'appartient pas à la série des nombres possibles?

Est-il pair ou impair, premier ou non premier?

Dans tous les cas... ce nombre (Galilée) n'égale pas son carré, son cube, sa puissance; or, s'il l'égalait, il faut admettre que la partie égale le tout.

Troisième partie: L'infini mathématique.

Ch. II: L'indéfini et la quantité infinitésimale.

Deux méthodes pour justifier le calcul infinitésimal:

1° Méthode des limites (méthode d'exhaustion d'Archimède; sommation des indivisibles de Cavalieri; l'une additive, l'autre soustractive) Méthode des premiers et derniers raisons, de Newton. Newton considère les limites fixes entre lesquelles varie la quantité, soit en augmentant, soit en diminuant.

Lemme 1er des Principes (lib. III.):

« Les quantités, et aussi les raisons des quantités qui, en tout
temps finie quelconque, tendent vers l'égalité, et ^{constamment} de
l'expiration à différer entre elles de moins d'une quel-
conque moindre que toute différence donnée, deviennent finies
égales.

Démonstration : Soit donc la proposition, soit que
dernière différence; elles ne peuvent donc s'approcher
de plus près que la différence donnée ϵ ; ce qui est con-
tradictoire.

Cette démonstration est valable, parce qu'on y croit
deux limites finies, donc la différence ^{constante} ne peut être
petite que toute quantité donnée sans être rigoureusement
nulle.

Cette preuve de cette démonstration est dans la méthode
des indéterminés, de Descartes (cf. Carnot, ch. II).

2^e Méthode des infiniment petits, de Leibniz.
« J'ai donné un jour des leçons des incomparables de
l'acte de Leibniz, qu'on peut entendre communément
soit des infinis à la rigueur, soit des grandeurs seulement
qui n'entrent point en ligne de compte au prix des autres.
C'est une méthode d'approximation infinie;
étant inassignable, mais jamais nulle. Donc.

Qu'il existe l'infini : Bernoulli, Fontenelle.

Qu'il existe le subsiste : Buffon, Aug. Comte.

Berkeley : The analyst or a discourse addressed to an infinite
mathematician (1734) : « In rebus mathematicis errores qui
minimi non sunt contemnendi. » Aug. Comte est le même

deau Bernoulli: « Si il existe une infinité de ces termes (dans une suite) il doit en exister une infinité, par la même raison dix engraient le dixième en rang des dix, et cent le centième en rang des cent.... Et l'infinité a son tour ne marque pas une limite, puisque tout nombre peut incontestablement être augmenté d'une unité, et de deux, et de trois.... C'est seulement une série nouvelle qui commence, toute formée des nombres infinis de grandeur, et le cas est analogue pour le décroissement des infinis de petitesse. » (Crit. phil. Géométrie, n° 2. — Cf. Renouvier, Logique, t. I, p 408, 409.)

Suz. Comte: « N'est-il possible de prévoir à quel point les opérations successives peuvent grossir ces erreurs premières dont l'accroissement pourrait même ainsi devenir quelconque. »

Solution (de Carnot): Toute quantité arbitraire en relation avec des quantités constantes perd, par ce seul fait, ce qu'elle a en son de mobile et d'infini, et doit être portée mentalement à la limite de sa décroissance ou de son progrès (cf. Carnot, ch. I.) L'exemple de la tangente (choisi par Carnot) montre que le résultat de l'élimination des infiniment petits n'est pas approché, mais rigoureusement exact, car on le retrouve par le calcul.

Les quantités infiniment petites sont par des quantités très-petites, ou simplement des quantités ^{finites} arbitraires ou indéterminées qui disparaissent et passent à la limite zéro dans les relations avec des quantités finites fixes.

Lagrange admet les différentielles comme des quantités finies (cf. Carnot, § 154 - 156.)

« Le miracle de la science humaine, c'est d'avoir du au
l'infini et le continu de la pensée au fini et au discret
de la nature »

an
co.

1

Bolzano: Paradoxien des Unendlichen.

§ 1. La plupart des paradoxes mathématiques, si on
tous, sont fondés sur l'idée d'infini.

§ 2. L'infini est opposé au fini: c'est un concept
formé par la négation du fini (grammaticalement)
Les deux concepts s'appliquent aux ^{multitudes} ~~ensembles~~ et aux
pluralités (^{multitudes} ~~ensembles~~ d'unités), et plus généralement
aux grandeurs. En Mathématique, on parle de
grandeurs infiniment grandes et infiniment petites.

§ 3. Le mot et signifie un ensemble d'objets
distincts ou le tout composé de certaines parties. Ex.
propositions à plusieurs sujets (sujet collectif.) Pour
qu'un ensemble A, B, C, \dots ait un sens, il faut que ses
éléments soient tous différents les uns des autres.

§ 4. Des ensembles identiques par leur contenu
peuvent être fort différents (ex. un verre à boire brisé
ou non.) Le fondement de cette différence est la manière
dont les parties sont unies ou ordonnées. Un ensemble
dont l'ordre des parties est indifférent s'appelle une
multitude (Menge.) Une multitude d'unités A (c-à-d.
d'objets rentrant sous le concept A) est une pluralité d' A .

§ 5. Il y a des ensembles dont les éléments sont à leur
tour des ensembles. Un ensemble dans lequel il est
indifférent de considérer les parties des parties comme
des parties de l'ensemble s'appellera une somme.
(Propriété associative caractéristique.)

57

§ 6: On appelle grandeur un objet d'une espèce telle que deux objets de même espèce sont, ou bien égaux, ou bien l'un est la somme de l'autre et d'un troisième.

§ 7: Quand un ensemble d'objets donnés est tel qu'à chacun de ses éléments en corresponde un autre suivant une loi uniforme, on appelle une série (Reihe). Cette loi est la loi de formation de la série. Les termes sont antérieurs ou postérieurs (sans que cela implique un ordre temporel unique). Un terme qui a un précédent et un suivant est dit intérieur. Les termes extrêmes (s'ils existent) sont le premier et le dernier.

§ 8: Soit une série dont le 1^{er} terme est une unité A , et suivants s'obtiennent en ajoutant une unité A au précédent. Tous ces termes (sauf le 1^{er}) sont des pluralités d' A (nombrels ou finis) et tous (y compris le 1^{er}) sont les nombres entiers.

§ 9: Si une pluralité donnée d' A est telle, que la série des nombres ne puisse l'épuiser, et n'ait un dernier terme, cette pluralité, plus grande que toute pluralité finie, sera dite infinie.

§ 10: Les termes finis et infinis sont définis ainsi sans confusion et sans lechevicieux, quand il s'agit de pluralités. Or toute espèce d'infini se ramène à une pluralité infinie. Les mathématiciens ne connaissent qu'un infiniment grand. Une grandeur est infinie quand aucun nombre fini ne peut la mesurer par rapport à l'unité. Une grandeur est infinie petite quand tous ses multiples sont inférieurs à l'unité. En dehors des infiniment grands et infiniment petits de différents ordres, les mathématiciens ne connaissent pas d'autre infiniment.

§ 11: Les philosophes modernes (Hegel) méprisent
 cet infini; pour eux, l'etrai infini est l'infini qualitatif,
 qui se trouve que dans l'Absolu ou Dieu. Ils ne
 conçoivent l'infini (comme certains mathématiciens) que
 comme une grandeur variable croissant au-delà de toute
 limite sans jamais atteindre l'infini. Il est certain que
 c'est là un faux infini: car une grandeur peut dépasser
 toute limite finie et rester finie (ex: les nombres entiers
 croissants). L'etrai infini est une grandeur non variable
 (ex: la longueur d'une droite illimitée). Kant se souvient
 qu'on ne peut attribuer l'infini qu'à un objet qui contient
 une grandeur ou une pluralité infinie. Exemple: Dieu.

§ 12: 1° Certains mathématiciens (Cauchy) définissent
 l'infini: une grandeur variable qui croît indéfiniment.
 La limite de cette variable serait la grandeur infinie.
 Mais une variable n'est pas une grandeur, mais la représen-
 tation d'un ensemble (infini) de grandeurs différentes.
 L'^{infinie} grandeur n'est pas l'ensemble de ces grandeurs, mais l'unique
 grandeur qui est leur limite (Ex: $\tan \frac{\pi}{2}$: n'est pas infinie,
 selon hauteur). De plus, si l'infini était la limite des grandeurs
 qui croissent indéfiniment (sans limite, ce qui est contradictoire)
 l'infiniment petit serait identique à zéro, ce qui est faux.
 2° Des mathématiciens et des philosophes (Spinoza) ont
 défini à tort l'infini: ce qui ne peut plus croître, ce à quoi
 l'on ne peut rien ajouter. Mais les mathématiciens peuvent
 fort bien ajouter encore à une grandeur infinie (ex: demi-droite).
 3° D'autres définissent l'infini à la lettre: ce qui n'a pas de fin.
 Mais un point ou un instant n'ont pas non plus de fin/début.
 car ce sont au contraire des extrémités. De même la circonférence
 (et autres courbes fermées).

D'autre part, il y a des grandeurs limitées qui sont infinies.
1^o On dit souvent : est infinie une grandeur plus grande que toute grandeur donnée. Mais si par donnée on entend d'ailleurs, une grandeur infinie peut être tout aussi réelle qu'une grandeur finie et si par donnée on entend possible (non-contradictoire) on admet d'avance que l'infini est impossible et contradictoire. On peut encore entendre par données les choses dont nous pouvons avoir l'expérience. Mais la qualité de fini ou d'infini ne dépend nullement du rapport de l'objet à notre sensibilité; c'est une attribute intrinsèque et objective, indépendante de la manière dont nous percevons (en totalité ou en partie.)

§ 13: De l'objectivité de l'idée d'infini. L'infini s'applique dans le domaine des choses idéales ou réelles: ainsi l'ensemble des vérités est infini: car à chaque vérité A correspond celle-ci: «A est vraie.»

§ 14: Pourtant, beaucoup vient qu'un infini puisse être donné. 1^{er} Obj: Un ensemble infini ne peut pas former tout dans la pensée. L'erreur consiste à croire qu'on ne peut penser le tout si l'on n'a une représentation distincte des parties (Ex: l'ensemble des habitants de Prague) Il suffit qu'elles rentrent toutes sous un même concept A pour qu'on puisse dire: l'ensemble A. Autre erreur: Un ensemble n'existe que s'il est pensé; une vérité n'existe que si on en a l'expérience. Ex: ce qui se passe au pôle est connu sans lois de la mécanique. D'ailleurs, tous les corps sont des ensembles dont nous ne percevons ni ne connaissons les parties. - 2^e Obj: Tout ensemble est une création de notre esprit. - Rép: Il existe encore que nous le remarquions, ainsi que toutes ses propriétés. - 3^e Obj: Pour qu'un ensemble existe, il faut qu'on puisse le penser tout entier, ce qui n'a lieu: en contraire il faut qu'il soit possible pour qu'il soit perçu. On peut fort bien penser l'impossible, et tout ce qu'on pense n'existe. Est impossible ce qui contredit une vérité de raison pure (de concepts). Ce n'est pas le fait d'être pensé qui fonde la possibilité d'être
donc

§ 15: La multitude des nombres est infinie

Obj.: Mais tout nombre est fini; donc la multitude des nombres est finie comme le dernier de tous.

Rép.: Il n'y en a pas de dernier de tous, ~~et~~ c'est justement pour cela que leur ensemble est infini; en vertu de la loi de formation, chaque nombre a un suivant: le concept du dernier nombre (nombre maximum) est donc contradictoire.

§ 16: La multitude des grandeurs est infinie.

L'ensemble des nombres entiers finis est une grandeur infinie, non un nombre infini (qui n'existe pas.)

§ 17: Infinité des parties de l'espace et du temps.
(même dans un intervalle fini.)

Obj.: «On peut toujours penser dans un intervalle plus de points qu'il n'en est donné, mais dans la réalité il ne peut en être donné qu'un nombre fini.»

Rép.: Le temps et l'espace ne sont pas des réalités; et leurs parties ne dépendent pas de notre pensée.

§ 18: La somme d'un nombre infini de grandeurs finies n'est pas nécessairement une grandeur infinie.
Ex: progression géométrique; Séries convergentes.

Remarque Dans les égalités: $S = 1 + e + e^2 + \dots + e^n + \dots$
ou $S = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e} + e^{n+1}(1 + e + e^2 + \dots)$

on ne doit pas poser cette parenthèse égale à S , car le nombre de ses termes est moindre quoique infini.

§ 19 : Il y a des multitudes infinies plus grandes ou plus petites que d'autres multitudes infinies.

Il n'y a contradiction que si l'on définit l'infini une grandeur qui ne peut plus être augmentée. Ex: une demi-droite peut être accrue d'une longueur finie ou infinie.

§ 20 : Deux ensembles infinis peuvent être ordonnés de cette sorte, qu'ils paraissent, soit égaux, soit inégaux.

Ex: $0 \leq x \leq 5$

$0 \leq y \leq 12$

Correspondance:

$5y = 12x$

Application aux longueurs portées sur une droite

§ 21 : D'une telle correspondance (univoque et réciproque) on ne peut conclure à l'égalité de deux multitudes, quand elles sont infinies. Il faut de plus qu'elles aient les mêmes principes de détermination, par ex. la même loi de génération.

§ 22 : Cette conclusion n'est légitime que pour les ensembles finis, où l'on arrive à un dernier terme en les énumérant. Mais dans les ensembles infinis, non-seulement nous ne pouvons arriver à un dernier terme, mais il n'y en a pas par définition.

§ 23 : Dans les ensembles infinis, deux éléments de l'un ne supportent pas les mêmes rapports que les deux éléments correspondants de l'autre (par ex. leur différence).

§ 24 : Deux sommes d'un nombre infini de termes égaux chacun à chacun ne sont pas nécessairement égales. Il faut de plus que les deux sommes aient les mêmes principes de détermination.

25: Il y a dans la réalité un être infini (un Dieu.)

26: Certains acceptent l'infini idéal et voient l'infini réel, parce que la réalité implique la détermination complète. Mais la détermination n'est pas moins nécessaire aux objets de la pensée. Qu'est-ce dire d'une chose qu'elle est infinie n'est pas dire qu'elle est indéterminée, mais seulement qu'elle échappe à la détermination du nombre: il n'y a pas là de contradiction.

27: Certains mathématiciens, en revanche, ont admis à tort l'infiniment grand et l'infiniment petit dans les cas qui n'en comportent pas: Exemple: un durée infinie qui aurait commencement et fin; un laps de temps infiniment petit; de même pour les distances de deux points; pour les forces physiques (démonstration fondée sur le principe de causalité et sur le fait que l'infini introduit ~~la~~ l'indétermination au sein du déterminisme.)

28: Possibilité d'un calcul de l'infini: il s'agit de déterminer le rapport de deux infinis entre eux.

29: Parmi les nombres ou pluralités, il y en a qui ont avec d'autres des différences et des rapports finis (tant rationnels qu'irrationnels.)

30: De même pour les infiniment petits (Exemple de probabilité; calcul complet de $\frac{dy}{dx}$ [y fonct. algébrique dex])

31: Les mathématiciens ont le tort de considérer les infiniment petits comme nuls par rapport aux infiniment petits d'ordre inférieur (de même pour les infiniment grands.)

32: On a prisen du (Ann Gergonne, t. XX, n° 12; 1.
 que la série: $a - a + a - a + \dots$
 a pour somme $\frac{a}{2}$ (quotient de a par $1+1=2$)
 Mais cette série n'est pas une véritable somme, car elle n'a
 pas les propriétés commutative et associative; elle n'a
 aucune valeur, car sa valeur dépend de l'ordre des termes.
 Quant à la considération de quotient, elle n'a de valeur
 que si le reste va toujours en diminuant, de sorte que le
 quotient soit de plus en plus approché. Par exemple

$$\frac{a}{1-e} = a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^n + \dots$$

n'a de sens et de valeur que si $|e| < 1$.

On a le tort de considérer la série mise en facteur ap-
 n termes (entre parenthèses) comme équivalente à la série
 totale (infinie) car elle a n termes de moins.

33: On ne doit jamais juger de l'égalité ou inégalité
 de deux sommes infinies par la comparaison de leurs
 termes correspondants et du nombre de ces termes. Ainsi
 la somme des carrés des nombres entiers paraît plus grande
 que la somme des nombres entiers; et aussi plus petite,
 parce qu'elle y est contenue. L'auteur se prononce pour
 la 1^{re} thèse: la somme des carrés est infiniment plus grande
 que la somme des nombres.

34: Eclaircissement du concept de zéro
 On voit pas seulement un signe sans objet c'est (V-T aussi)
 il est défini par les égalités: $A-A=0$ $A \pm 0 = A$
 En même temps l'addition et la soustraction s'étendent
 à ce symbole (extension précieuse pour la science)

La multiplication reçoit une extension analogue :

$$A \times 0 = \cancel{A} 0.$$

Mais la division ne peut en recevoir une qui ne soit pas contradictoire avec les formules précédentes; car si dans la formule:

$$B \times \frac{A}{B} = A$$

on faisait $B = 0$, on aurait pour produit: A , au lieu de 0 (en vertu de la formule de mult^{on} par 0.) On ne doit donc pas diviser les 2 nombres d'une équation par zéro (à moins que ce ne soit une identité) ni supprimer un facteur qui peut devenir nul.

35: Il ne faut pas négliger les infiniment petits d'ordre supérieur comme nuls; car ils reparaissent avec leur valeur quand les infiniment petits principaux s'annulent.

M et $M+m$ ne sont pas égaux, car M par ex. peut être rationnel, alors que $M+m$ serait irrationnel.

36: Euler considère les infiniment petits comme nuls, et les infiniment grands comme quotients des grandeurs finies par des infiniment petits. On justifie ainsi l'omission (annulation) des infiniment petits, mais on rend leurs rapports inconcevables. — Exemple: Soit y fonction ^{algébrique} ~~rationnelle~~ de x . Quand le dénominateur s'annule, la formule (de la forme $\frac{m}{0}$ ou $\frac{0}{0}$) n'indique plus la valeur de y ; elle n'indique que pour les valeurs infiniment voisines de celle qui annule le denom. On croit pouvoir lever l'indétermination en supprimant le facteur $(x-a)$ au numér. et au denom.: mais on oublie que cette opération n'est valable que tant que $x \neq a$. Il est vrai que la valeur qu'on obtient ainsi se lie par continuité (pour la fonction, pour $x=a$)

aux valeurs voisines: mais il n'y a aucune nécessité à ce que la loi de continuité soit observée par la fonction pour cette valeur.

37: Il est vrai que le calcul de l'infini, malgré ces erreurs, conduit à des résultats exacts: mais cela vient de ce que les opérations en apparence incorrectes se justifient par une autre qui est légitime, et dont les inventeurs ont eu le sentiment.

Conception du Calcul infinitésimal. Instable de supposer que les grandeurs considérées peuvent être infiniment petites: il suffit que les grandeurs variables et dépendantes aient une dérivée finie dans l'intervalle considéré. — La dérivée ($\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$) est précisément en annulant Δx et Δy dans l'expression du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; de sorte qu'il n'y a pas d'inconvénient à considérer dx et dy comme nuls, bien que le rapport $\frac{dy}{dx}$ n'ait plus de sens dans cette hypothèse. Ces symboles ont par un véritable rapport, mais la limite du rapport réel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

L'auteur peut démontrer la formule de Taylor pour toute fonction y de x , à l'exception de valeurs isolées de x et Δx .

Importance de cette formule pour la rectification des lignes, la complanation des surfaces, le cubage des solides, sans recourir aux infiniment petits ou à des postulats équivalents.

Les formules légitimes connues $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ on déduit les formules symboliques en différentiant: $ds^2 = dx^2 + dy^2$

qui sont valables, parce qu'on peut en tirer les premiers en effectuant sur les différentielles toutes les opérations algébriques permises pour les grandeurs finies (par ex: division par dx). Elles ne peuvent donc conduire à aucune erreur.

De même, on peut sans aucune erreur négliger au cours du calcul les quantités différentielles qu'on sait d'avance devoir disparaître du résultat final. (passage des Δx aux dx , en omettant les termes de puissances supérieures.)

Cette méthode repose sur des principes analogues à ceux du calcul des imaginaires. C'est toujours des symboles vides de sens que l'on combine de telle sorte que les relations obtenues en leur substituant des quantités réelles soient ~~correctes~~ ^{toujours} vraies.

38: Prétendus contradictions inhérentes au concept de continu (temporel, spatial, matériel). Le continu serait composé de points instantanés. Pourquoi pas? Parce que dit-on, une propriété qui manque à toutes les parties ne peut appartenir au tout. Ce n'est pas une raison: chaque tout a des propriétés qui n'appartiennent pas à ses parties.

On dit qu'entre deux points, il y en a encore d'autres; sans doute: cela prouve que le continu se compose d'une infinité de points; encore faut-il que cette infinité soit rangée dans un certain ordre. Définition du continu: un ensemble de points tels, que chacun d'eux en ait au moins un autre dans son voisinage (inf. petit). — Dans le cas contraire, le point est dit isolé.

On exige que chaque point ait son voisin déterminé qu'il touche: c'est impossible et contradictoire.

— Cela n'est pas inconcevable mais insaisissable. Il faut bien se garder d'admettre un intervalle minimum. Tout ensemble infini peut se diviser en ensembles aussi infinis. Mais certains mathématiciens reconnaissent que le continu ne peut être engendré par la juxtaposition des points. Sans doute, la subdivision à l'infini (dyotomie) n'atteint

pas les éléments du continu. Mais le continu ne peut se réduire que de points.

39: Paradoxes dans le concept du temps.

Le temps n'a aucune réalité; il n'est ni substance ni accident. Il ne change pas, car il est ce en quoi tout change. N'est-ce pas un attribut contradictoire du principe de contradiction; à l'instant, x est a ou non- a (c'est la définition de lieu). Le temps infini est l'ensemble des instants; il ne diffère pas de l'éternité. Seulement les choses vraies changent dans le temps tandis que Dieu reste le même. Chaque laps de temps, soit qu'il soit, comprend une infinité d'instantes (non en un instant, mais dans un grand intervalle).

40: Paradoxes dans le concept de l'espace.

Même conception que pour le temps (L'auteur a déduit la conception de l'espace de celle du temps, et a montré pourquoi l'espace a trois dimensions). L'espace infini est l'ensemble des lieux.

L'espace n'est pas réel, mais il est objectif (c'est une propriété des choses). N'est composé de points, qui néanmoins ne se touchent pas.

— Étendue à 1 dimension: telle que les points situés dans le voisinage de chaque point ne forment pas une étendue.

Étendue à 2 dimensions: telle que ces points forment une surface.

Étendue à 3 dimensions: telle que ces points forment un volume.

— En quoi consiste la grandeur d'une étendue? On est tenté de répondre: Dans la multitude des points qu'elle contient.

Mais la grandeur d'un solide ne change pas quand on enlève tous les points de sa surface, etc. (comme cela a lieu quand on mesure par ex. un cube d'arête 2, les 12 faces disparaissent). La mesure d'une grandeur continue détermine la grandeur M de l'unité m de la gr. N de la même sorte, que par la même loi on détermine la grandeur $M+N$ de l'unité $m+n$, sans avoir à tenir compte d'éléments ou entités.

41: Propositions paradoxales touchant l'étendue.

- 1: Une droite limitée ou illimitée a la même longueur quand il est illimitée, il n'a pas de dernier point.
- 2: Le périmètre d'un triangle peut en pas contenir tous les sommets, ou les contenir deux fois.
- 3: Si l'on dichotomise un segment de droite et qu'on y supprime les points de division il a la même longueur.
- 4: Deux intervalles égaux contiennent le même nombre de points.
- 5: Deux étendus qui contiennent la même multitude de points sont égaux; mais non réciproquement.
- 6: Deux figures semblables contiennent des multitudes de points proportionnelles à leurs grandeurs.
- 7: Par suite, il peut y avoir des multitudes (infinies) dont le rapport est irrationnel. (J. K. Fischer)

42: A la 6e prop. on oppose souvent celle-ci: Deux figures semblables contiennent le même nombre de points (ex: cercles concentriques) donc contradictions (Aristote.) Cela repose sur ce principe erroné: deux multitudes infinies sont égales quand elles se correspondent élément à élément. D'ailleurs le même raisonnement s'appliquerait aux droites.

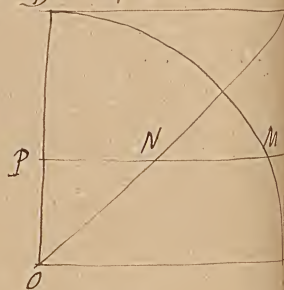
43: Les mathématiciens ont même vu comme cette vérité:

«La distance de deux points ne peut être que finie,» en admettant des distances infiniment grandes (Ex: tangente et sécante trig.) Ces longueurs infinies sont-elles positives ou négatives? Il est faux de dire que $\tan \frac{\pi}{2}$ est infinie: rigoureusement parlant, $\sin 0$ et $\tan 0$ n'existent pas.

44: Autre erreur: Joh. Schultz a voulu calculer la grandeur de l'espace infini: $\frac{4}{3} \pi w^3$. Il a conçu chaque demi-droite infinie comme un rayon donc comme

limite, & l'espace lui-même comme limite (sphérique).
 Clarifiée aussi Boscovich (Diss. de transf. locorum geor.
 45). De même, on admet à tort des distances inf. petites
 et même des ordres superposés (en concevant les courbes comme
 composées de droites inf. petites, etc.) Seulement, ce qui
 qu'on ne commet aucune erreur, c'est que les fonctions
 continues que l'on considère ont une dérivée (sauf en
 certains points isolés) de sorte que tout ce qu'on dit des grandeurs
 inf. petites veut des mêmes grandeurs finies qui décroissent
 indéfiniment. Paradoxe: les courbes, quoique composées
 d'éléments rectilignes, auraient une courbure: courbure
 inf. petites et inf. grandes en certains points.

46: Paradoxe de Galilée: La circonférence égale au carré
 (comme surface) ^{de son} engendrée par
 MR est égale au cercle engendré par PN;
 à la limite, PN se réduit à O, & MR à B.
 Cela veut simplement dire que le cercle
 PN & le carré MR n'existent plus
 (ont une surface nulle.)



47: La cycloïde aurait une courbure infinie de rayon nul
 au point de rebroussement. Cela signifie que son rayon de courbure
 diminue indéfiniment quand on s'approche de ce point.
 On peut montrer géométriquement que la cycloïde est intérieure à
 toute circonférence passant par ce point & normale à la base.
 & moi dire, la courbe n'a plus de courbure en ce point.

48: 1° Des étendus infinis peuvent avoir une grandeur finie
 (non des lignes continues, mais des surfaces et des solides). Démonstration
 du théorème: la ligne droite est le plus court chemin
 par la considération de la similitude.

2° Une étendue contenue dans un espace fini peut être infinie en grandeur (vrai pour les lignes et les surfaces, non pour les volumes.) Une surface finie peut contenir une ligne infinie car la limite de surface n'est pas la limite de longueur.

3° Une figure peut faire une infinité de tours autour d'un point, et néanmoins être finie en grandeur. Ex: la spirale logarithmique, prise en-deçà d'une certaine distance du pôle. Cela est en son vrai pour les surfaces et les solides sans supposer (comme pour les lignes) qu'elles soient contenues dans un espace fini.

49: 1° La multitude des points d'un segment linéaire quelconque est infiniment plus grande que celle des points de division obtenus par dichotomie par ex. (cf. Cantor.)

2° Deux figures égales ont le même nombre de points, quand on définit de même leurs bornes.

3°-7° Calcul du nombre des points du carré, du cube, du rectangle, du parallélogramme.

8° Toutes les droites infinies sont égales (ont le même nombre de points)

9° Les deux moitiés d'une droite infinie ne sont pas égales; donc une telle droite n'a pas de milieu.

10°-11°: Surface d'une bande parallèle (elle n'a pas de ~~milieu~~ ^{milieu})

12°-13°: Surface du plan infini (il n'a pas de milieu)

14°: Deux angles opposés par le sommet sont semblables, non égaux.

15°-16°: Volume d'une couche parallèle (n'a pas de plan médian)

17°-18°: Deux angles dièdres opposés sont semblables, non égaux.

19°: L'espace infini ^{ou solides} n'a pas de plan médian.

50: Paradoxes en métaphysique et en physique.

1^o L'auteur pose en principe qu'il n'y a pas deux corps ni même deux atomes parfaitement égaux. L'expérience n'a rien de bon dans cette question. Du moment que A et B sont deux objets, A n'est pas B, B n'est pas A; ils doivent donc se distinguer par quelque caractère non commun.

2^o L'expérience nous apprend que les corps sont composés, soit, mais grâce à des vérités rationnelles. Si donc la raison nous enseigne que le composé suppose le simple, nous ne pouvons révoquer en doute l'existence de substances simples sous peine que nous ne les voyions pas.

3^o Toute substance change incessamment, malgré les apparences contraires. On prétend expliquer tous les changements apparents par des mouvements d'atomes immuables. mais comment concevoir les déplacements d'atomes, leurs actions réciproques sans changements intérieurs? Il faut admettre que leur forme varie, et que leur lieu varie en conséquence.

51: Réfutations des ^{préjugés} ~~opinions~~ Scolastiques contraires.

1^o Hypothèse d'une matière morte et homogène.

52: 2^o On ne peut admettre une action immédiate d'une substance sur une autre. C'est une règle de méthode destinée à combattre le sophisme parissien; mais comment concevoir une action immédiate sans une action immédiate? Contradiction. (Hypothèse de l'harmonie préétablie, gâte le système de Descartes.)

53: 3^o Impossibilité d'une action à distance. Sur deux substances on ne peut agir l'une sur l'autre qu'à distance.

54: 4^o Rénégation de l'existence des substances. Si deux atomes se rencontrent un seul instant, leur action réciproque serait indéfinie.

55: 5^o Une substance pensante ne peut être étendue, et ne peut même pas occuper un point dans l'espace. D'où Kant a conclu que l'espace n'est qu'une forme subjective de la sensibilité, et que le monde intelligible (des esprits) est étranger à l'espace. (Cf. Wissenschaftslehre et Athanasia.)

56: 6^o Difficulté de l'union de l'âme et du corps, et de leur mutuelle influence: disparaît.

57: 7^o Conception des forces sans substances (corrélatives des substances sans forces) vient de l'idée grossière et sensible de substance. Mais une force sans substance, produisant des effets réels, devrait être réelle, donc serait elle-même substance.

58: Il n'y a pas de degré d'existence qui soit le plus haut ou le plus bas (voir § 38.) (paradoxe affirmé par Kant.)

59: Une même multitude d'atomes peut remplir un grand ou un petit espace, sans qu'aucun point reste vide ou reçoive plusieurs atomes. Il n'est ~~pas~~ donc pas besoin d'admettre la porosité et le vide, ni la pénétrabilité des corps, pour expliquer les divers degrés de densité (en nombre infini).

60: Toute substance agit sur chaque autre, d'autant moins qu'elle en est plus éloignée; de sorte que la résultante des actions subies par chaque atome obéit à la loi de continuité.

61: Il y a des substances dominantes (cf. Athanasia, 1829) mais sans que leur force soit infiniment plus grande que celle des autres substances (dominées).

62: Il n'est pas nécessaire que dans un ensemble (infini) d'atomes il y en ait un plus fort que tous les autres (dominant); cela n'est vrai que pour les ensembles finis.

63: Les atomes dominants (en nombre fini dans un espace) composent les corps. Les autres forment l'éther. Les atomes se distinguent que par le degré de leurs forces. On doit admettre qu'ils en ont une sensation, si faible qu'elle soit. Or deux atomes ne sont pas indifférents à leur distance: il y en a une qui leur plaît davantage; d'où attraction et répulsion. Quand la distance de deux atomes dominants est suffisamment grande, leur action disparaît dans la multitude infinie des autres atomes, de sorte que la résultante est la même que si le corps n'était composé que d'éther homogène. D'où la loi d'attraction proportionnelle aux masses (multitudes d'atomes) et en raison inverse du carré de la distance (car le nombre des atomes peuvent exercer leur action qu'un autre sur l'atome considéré est proportionnel au carré de la distance). C'est ce qui explique ce fait à l'étonnement, que tous les corps simples (matières hétérogènes) ont le même poids propre aux masses, c'est-à-dire sont également attirés. Ainsi c'est l'éther (le calorigène, qu'on considère à tort comme impondérable) qui constitue la masse des corps et détermine leur poids.

64: Les atomes d'éther étant fortement attirés et condenses par l'atome dominant, tendent à s'éloigner et se repoussent d'où la force répulsive considérée comme primitive dans les corps.

65: Un atome dominant ne peut jamais être dépossédé de tous ses atomes dominés. Il retient au moins les plus proches.

66: Question de la limite des corps. C'est l'éther qui dépend des atomes dominants du corps. On conçoit que cette limite soit très variable, et même qu'elle n'existe pas car il se peut qu'il n'y ait pas parmi les atomes dominés des derniers atomes (par ex. quand le corps voisin en a.)

67: Quand deux corps se touchent-ils immédiatement?
Quand ^{leurs} atomes extrêmes forment une étendue continue. ~~avec les~~
~~atomes extrêmes de la~~ Par ex, quand l'air interposé disparaît.
Un corps est en contact, soit avec d'autres corps (tels qu'air)
soit ^{toujours} au moins avec l'éther.

68: On croit que dans le plein il n'y a que le mouvement
circulaire qui soit possible. Mais il y en a bien d'autres, puisque
la densité peut varier à l'infini: par ex la vibration, la rotation.
(Remarque: un atome indéfini ne peut tourner sur lui-même.)

69: Il n'est pas impossible qu'un atome décrive une droite ou un
cercle, mais cela est infiniment peu probable; pour qu'un atome
décrive une ligne brisée, il faut qu'il avertisse ^{à l'instant} (un instant)
à chaque sommet. Mais il est contradictoire qu'un atome décrive
la spirale logarithmique (branche centrale) en un temps fini, et
qu'il arrive ainsi au pôle: car si sa vitesse linéaire est constante la
vitesse angulaire devient infiniment grande; or aucune force finie
ne peut produire un tel effet. Même alors, l'atome ne pourrait
arriver au centre: car si le centre appartient à la courbe elle n'a
aucune direction (dérivée) en ce point.

Si un atome tout entier peut-il se déplacer ou tourner d'un seul coup?
Ce n'est pas impossible géométriquement, mais physiquement.
Car aucune force ne peut produire un tel effet; et un tel mouvement
n'aurait pas de raison suffisante.

70: Deux paradoxes d'Euler: le 1^{er} remarqué par Boscovich:
Si on lance un point A soumis à l'attraction newtonienne du centre
est lancé perp. à AC, il décrit une ellipse ayant C pour foyer.
Donc si la vitesse initiale devient nulle, l'ellipse se réduit à AC;
d'autre part, le point A devrait dans ce cas osciller de part et d'autre
également de C

Mais d'abord, ce cas échappe à la loi de continuité; et en effet
 la force et la vitesse en C devraient être infinies, ce qui est impossible.
 Le paradoxe: l'oscillation infiniment petite du pendule
 pour durée: $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}$; tandis que la chute sur la corde
 infiniment petite (plan incliné) a pour durée: $\sqrt{2} \sqrt{\frac{L}{g}}$
 Or on identifie la corde et l'arc infiniment petits.
 Ici encore, la continuité est violée: la corde infiniment petite
 diffère de l'arc infiniment petit: pas ex, elle n'a pas de courbure.

P. du Bois-Reymond

Paul du Bois-Reymond: Théorie générale des fonctions.

Deuxième partie: Métaphysique et théorie des concepts
mathématiques fondamentaux: Grandeurs, limite,
argument et fonction

traduit de l'allemand par G. Méthaud et A. Girod.

Nice, 1887.

Q. I. Les grandeurs mathématiques se réduisent de proche en proche aux grandeurs linéaires (nombres et longueurs.)

Définition du concept de quantité mathématique

1^o Comparaison sans représentation de mesure:

I. Les quantités math. linéaires sont égales ou inégales ^{de même espèce}

II. Parmi les quantités linéaires de même espèce, aucune n'est la plus petite ni la plus grande.

III. Deux quantités de même espèce réunies forment une nouvelle quantité de la même espèce, et plus grande.

IV. Quand une quantité est plus grande qu'une deuxième, il en existe toujours une troisième (de même espèce) qui a la deuxième reproduit la première.

2^o Comparaison avec représentation de mesure:

(On conçoit les parties composantes d'une quantité commune.)

V. On peut toujours additionner des quantités égales, nombre suffisant pour obtenir une quantité au moins grande qu'une quantité quelconque de la même espèce.

VI. Une quantité peut être partagée en n parties égales, n étant un nombre entier quelconque; et l'on peut prendre n grand pour que les parties obtenues soient plus petites qu'une quantité de la même espèce, donnée aussi petite qu'on veut. Si petites que soient de ailleurs ces parties, elles sont toujours des quantités de même espèce.

L'unité et le un. Ce qui est de base au concept de nombre entier, c'est le un; Comme le un est le point de départ des nombres entiers, l'unité est celui des nombres fractionnaires. Toute unité est un un, mais tout un n'est pas une unité.

Les deux conceptions idéaliste et empiriste de la limite et de la grandeur.

A. Système idéaliste.

Si l'idéalisme. Le concept de limite.

L'existence de la limite a besoin d'une démonstration.

On considère le segment rectiligne $(0,1)$ et les points rationnels et algébriques de ce segment; en particulier ceux qui répondent aux fractions décimales de la forme: $0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_9$.

Si une fraction décimale est illimitée et périodique, on sait qu'elle a pour limite une fraction non décimale, c'est-à-dire un nombre irrationnel. Donc une suite de points rationnels peut avoir pour limite un point rationnel.

Si une fraction décimale se prolonge indéfiniment suivant une loi donnée, sans être périodique, a-t-elle encore une limite?

Elle n'a pas pour limite un nombre rationnel. Il faut alors démontrer l'existence d'un point-limite auquel correspondra le nombre irrationnel défini par la fraction décimale illimitée

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots$$

Dans toutes les démonstrations tentées de l'existence de ce point, on considère l'étendue comprise entre les 2 points extrêmes de deux suites de points qui convergent, c'est-à-dire l'intervalle des valeurs par excès et par défaut de la fraction illimitée: cet intervalle $\frac{1}{10^n}$ décroît sans cesse, sans jamais devenir nul; à un certain moment, on considère l'étendue qui décroît indéfiniment comme nulle, et on la réduit à un point, qui est le point-limite. Mais ce passage d'une étendue linéaire, si petite qu'elle soit, à un point, est illégitime: un intervalle linéaire est toujours semblable à l'intervalle $(0,1)$ et ne peut être assimilé à un point. « Une rencontre graduelle de deux

points, expressions dont on se sert et qui semble très-bien
le fait, est absolument un non sens. Ou bien on ad-
dresse par une étendue, ou bien on n'a qu'un seul point
n'y a pas de milieu. »

On n'a jamais que des étendues de plus ou plus petites
mes les uns dans les autres, sans que jamais leurs extré-
mités se confondent et déterminent aucun point. On
ne pourrait démontrer l'existence du point-limite qu'en
la ligne comme composée de points; mais c'est là une
contradiction et anti-mathématique. Au fond, cette con-
ception implique le même sophisme, on imagine des points de plus
plus rapprochés, puis on considère leurs intervalles entre
eux. La démonstration de l'existence du point-limite irré-
ductible est donc impossible, et contradictoire quand on l'essaie.
Sortons de la représentation et plaçons nous dans la réalité.
~~vous demandez si~~ Existe-t-il, indépendamment de nous,
un point limite correspondant à la fraction illimitée $0, \alpha, \alpha^2, \dots$ existent ?
lorsque les étendues $0, \alpha, \alpha^2, \dots$ existent ?
plus de savoir quels sont les points que nous pouvons désigner
sur une ligne de droite représentée (imaginée) mais
ceux qui y existent réellement (distinction du possible
et du réel).
Distinction de l'illimité et de l'infini. « Les corps
nous apparaissent en nombre illimité; mais leur nombre
ne peut être que fini ou infini. » - On se représente le fini
comme illimité, non comme infini.
« On appelle illimité en grandeur ce qui, tout en étant
peut être dépassé par des multiples de mesures fines, par
un nombre toujours grandissant et sortant des bornes de tout
« Illimité est donc toujours fini; l'infini est ce qui n'est pas fini »

dans la direction de ce qu'on suppose illimité, c'est-à-dire ce qui n'est pas fini.»

« Quel est donc le nombre des points de divisions situés sur l'étendue unité? Dans la représentation, ce nombre est illimité, & par suite, dans la réalité objective, il est infini.»

« L'étendue unité se décompose en une infinité d'étendues partielles, dont aucune n'est finie. Or un infini est petit existe réellement.»

« Un nombre fini d'étendues infiniment petites ajoutées les unes aux autres ne donne pas une étendue finie, mais une nouvelle étendue infiniment petite.»

De même, si grande qu'on puisse se figurer une étendue finie, un nombre fini de parcelles étendues ajoutées les unes aux autres donnent toujours de nouveau une étendue finie.»

« Deux quantités finies dont la différence est infiniment petite sont égales.»

Cette définition de l'égalité satisfait les conditions mathématiques, savoir que si 2 grandeurs ne sont pas égales, leur différence doit être une espèce, c'est-à-dire telle qu'on la multiplie par un nombre fini, & dépasse les 2 grandeurs considérées.

« Une quantité finie ne change pas si on y ajoute ou qu'on en retranche une infiniment petite.»

L'infiniment petit est irrépréhensible, par essence, dans son rapport avec le fini; celui même, il peut se représenter comme fini.

« L'infiniment petit est une quantité mathématique et a de commun avec le fini l'ensemble de ses propriétés.»

Une fois admis le concept de l'infiniment petit, on peut prouver l'existence du point-limite, car l'intervalle des 2 suites de points convergentes devient infiniment petit.

« L'ensemble de tous les nombres est infini. »

« On est tenté d'abord de croire qu'il n'est qu'illimité, pense à celui qui compte; mais il faut encore ici se parer de celui qui compte du nombre lui-même. » (Nombres infinis après Gauss.)

« Les nombres rationnels (compris entre zéro et un) forment un ensemble illimité, et non infini. » En effet, leur numérateur et leur dénominateur doivent être finis. L'ensemble des rationnels peut être supposé aussi grand qu'on veut, mais fini.

« L'ensemble des nombres entiers est infini, parce qu'il n'y a pas de limite à leur existence, tandis que l'ensemble des rationnels est lié à la personne qui pense. » ?

Distinction du zéro et de l'infinitement petit.

« Les formes $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$, soit à réprouver, car elles manquent de exactitude et de sens. »

« Le zéro n'appartient pas au domaine des quantités telles que une quantité. » On peut faire parcourir à une suite de nombres des valeurs positives et négatives, finies et infinies, sans passer par zéro (1)

« On ne devrait pas dire, $x^2 - 1$ s'annule pour $x = 1$, mais devient infinitement petit pour $x = 1$. »

« $\frac{1}{x}$ devient infini positif quand x devient inf. négatif »

Règle $U = 0$ signifie que U est un infinitement d'ordre supérieur à ceux qu'on a négligés pour le moment, et que pourrions figurer dans le membre la valeur de $(1 + \frac{1}{x})^x$ est e pour x infini, et $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ pour x infinitement petit.

(1) Cela paraît être un acte violent de l'imagination d'annuler une quantité pour la ramener au zéro, comme on rallume un flambeau

Trois opinions historiques sur les infiniment petits :

Les uns ont attribué à l'infiniment petit une existence réelle.
D'autres, intermédiaires, considèrent l'infiniment petit comme une quantité fluente, tendant vers zéro (illimité en petitesse).

D'autres enfin entendent par infiniment petit une quantité finie qu'on peut rendre aussi petite qu'on veut, de sorte que les relations puissent être rendues aussi peu inexactes qu'on veut.

Newton et Lagrange ont introduit l'infiniment petit comme simple expression littérale.

« Autant les savants sont disposés à placer l'infini au-dessus de l'illimité dans l'espace et dans le temps, autant la plupart d'entre eux se décident difficilement à croire à l'infiniment petit, quoiqu'il possède le même droit à l'existence que l'infiniment grand, et que même il doive s'en déduire avec une nécessité logique »

Chaine naturelle des quantités :

« L'infinitésimal n'y est pas compris, car il n'est pas une quantité. »

- Infiniment petit
- Illimité en petitesse
- Fin
- Illimité en grandeur
- Infiniment grand

Une fraction décimale illimitée a pour limite fixe une grandeur mathématique.

Critique du système de l'Idéaliste par l'Empiriste.

Les séries de pouvoirs de 10 ne sont pas des nombres, quoiqu'Idéaliste les considère comme des quantités données.

L'Idéaliste : Un nombre décimal illimité peut être donné sans aucun loi de succession de ses chiffres, c'est empiriquement, donnant un longuier (incommensurable avec l'unité), et en supposant que l'on puisse ^{quelque} poursuivre indéfiniment les opérations de mesure

On peut appeler empiriques ces nombres irrationnels sans
mathématique, sans loi.

L'Empiriste. L'hypothèse fondamentale de l'idéalisme
l'existence de la mesure exacte : la longueur exacte et l'idée
nature de la longueur et de ses parties aussi petites qu'on veut (des
l'exact ~~sensible~~ dans la perception sensible n'est qu'une approximation
De l'exact sensible nous tirons le concept d'exact idéal, qui
répondant pas à une perception réelle n'est qu'une représentation
« C'est l'origine de l'idéalisme ^{inconscient} commun à tous les hommes, la
métaphysique » Nous croyons, sans l'avoir vu, à la possibilité
de l'exact parfait. — Aucune forme de la nature n'est qu'une
exacte : hétérogénéité absolue de la matière. Même si la
de la nature des figures exactes, nous ne pourrions les reconnaître.
Toute mesure est approximative : on ne peut s'assurer empiriquement
qu'une quantité n'est rigoureusement nulle, qu'une ligne n'est
seulement droite, etc. — Limite de longueur n'a donc qu'une
arbitraire. — La mesure exacte, avec toutes les idées qui en
(limite, infinis ent petit, etc.) n'est qu'un produit verbal
sans aucune réalité. — Principe de l'empiriste : Pas de mesure
sans représentation.

L'Idéaliste. Distingue les idéaux géométriques des
empiriques auxquels ils s'appliquent. — Le concept de l'exact
homogène est la dernière abstraction tirée des représentations du monde
Peu importe que cet espace soit idéal. Cet espace contient
les figures qu'on peut s'en servir, avec une précision absolue.
La pensée qui analyse la matière doit toujours aboutir à
images exactes. L'inexactitude même enveloppe une certaine
Deux manières d'engendrer les grandeurs géométriques :
progressive : celle-ci suppose le mouvement continu, et on

comme espace infiniment petit. La première donne des représentations exactes, d'où l'on tire le concept du point, c'est-à-dire de l'infiniment petit, avec lequel on reconstruit l'espace. L'empiriste. L'espace vide et homogène, les atomes, le point, sont des limites irréprésentables de concepts réprésentables: ce sont des mots sans réalité. — La distinction entre illimité et infini n'a pas de sens: infini veut dire sans fin, c'est-à-dire illimité, et ne signifie pas autre chose. « Je ne puis me figurer que des choses finies d'une grandeur et d'une petitesse arbitraire. »

L'Idéaliste. Nous avons la conviction qu'il existe certains choses en dehors du système de nos représentations (réalité extérieure). Les concepts idéalistes d'infini, d'exact, etc., sont dans un rapport direct avec cette réalité, cette machinerie insondable qui se cache sous les coulisses du monde des phénomènes. » Il ne s'agit pas de découvrir l'existence de ces objets idéaux en dehors du système de représentations: cela est impossible, car cela suppose que les idéaux soient logiquement liés à nos représentations et en fassent partie. L'existence d'une limite de représentations saute aux yeux, et s'impose à l'esprit en vertu d'une impulsion irrésistible qui nous porte à dépasser le domaine des représentations. « L'empiriste est comme l'enfant sage qui se garde bien de franchir la haie du jardin. »

B. Système empiriste.

L'empiriste. Toute connaissance sûre (bien fondée scientifique) dérive des perceptions immédiates et doit pouvoir se ramener à notre système de représentations correspondant aux objets perceptibles. Epuration du système de concepts: on rejette les concepts auxquels ne correspondent pas des représentations réelles, mais bien des limites irréprésentables de représentations: ce ne sont que des mots.

Toute relation exacte entre des concepts doit pouvoir se tenir
perceptions, sans l'aide du non-représentable. Nos repr.
doivent suffire à fournir les concepts et les principes généraux
de l'analyse. — L'Idéaliste pose l'existence de la limite comme
arbitraire, un objet de foi. L'Empiriste n'admet pas de limite.

Il idéalise ses représentations, les rend aussi de moins en moins
inexactes, aussi peu inexactes qu'il veut; mais il s'en
débarrasse de ses représentations lui-même de la ligne droite par
car ce n'est que le terme d'une suite de perfectionnements
(perfectionnés) que n'admettent pas de terme.

L'opposition entre l'Idéaliste et l'Empiriste se concentre
l'opposition entre l'exact parfait et l'exact d'habitude.

Représentations empiristes des images géométriques :
largeur et épaisseur, point avec 3 dimensions; les dimensions
négligées étant aussi petites qu'on le veut (j'aurais voulu dire
et même l'espace sont composés de points sans lacunes.

Le concept de limite. Reprenant les deux démonstrations de
l'Empiriste la limite est valable en attribuant à la ligne une
Représentation grossière de la limite par du trait d'union
qui finissent par se recouvrir et se confondre.

Pour l'Empiriste, le confinement grand et le confinement
ne sont qu'illusions.

L'Empiriste n'admet aucune longueur exacte.

Le rapport de dépendance le plus simple est la proportion
On trouve à le retrouver dans les fonctions ^{en général}; d'où la

« Dans le concept de la tangente est un pligui le retour
dépendance sans restriction à la proportionnalité. »

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = a + \varepsilon \quad \text{Et tendant vers 0}$$

Cette relation contient le retour de la dépendance générale
proportionnalité; elle est le fondement du calcul différentiel.

Fonctions orthogonales = qui ont une dérivée.

corruption empiriste du calcul différentiel, avec des ϵ ayant pour limite Zéro. (Equations imparfaites de Carnot) Comme les équations différentielles initiales sont homogènes par rapport aux différentielles et aux ϵ , les équations finales le sont aussi. Et toute partie qui dépend des ϵ dans les équations qui portent sur des produits différentiels disparaîtra, exactement comme si nous avions laissée de côté dans les équations primitives. — Ainsi justifie la forme idéaliste donnée aux équations différentielles inexacte au point de vue empiriste, parce qu'on supprime les ϵ (correction!).

$$dy = f(x) dx.$$

L'auteur écarte la corruption intermédiaire de la différentielle d'une quantité évanouissante, sans cesse en mouvement. C'est un compromis bâtarde entre la corruption idéaliste (dx infiniment petit réel et fine) et la conception empiriste (dx fini et suffisamment petit, mais également au repos). Cette représentation de quantités pures naît d'un idéalisme obscur ou timide.

Anorthogonisme permanent des fonctions, non plus en des points isolés, mais en tous les points. Cette propriété résulte de la conception numérique de l'argument, de la distinction des valeurs rationnelles et irrationnelles, algébriques et transcendentes — exemple (Riemann): Soit une suite de fonctions

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$$

soit la première saute pour toutes les valeurs entières de l'argument, la 2^e pour les multiples de $\frac{1}{2}$, la 3^e pour les multiples de $\frac{1}{3}$,

et si l'on forme la somme: $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots$ les λ représentant des coefficients numériques choisis de façon que la série converge, on aura une fonction qui saute

dans tout intervalle si petit qu'il soit. — C'est Dirichlet et
Riemann qui ont donné au concept de fonction toute sa
généralité en envisageant des dépendances anarthroïdes.
Conclusion de l'empiriste: Le fini suffit à l'édification
mathématiques. On ne doit admettre que des quantités
grandes et suffisamment petites selon les conditions du

— L'Idéaliste « Une fonction qui prend une valeur pour
rationnelles de l'argument, et une autre valeur pour
irrationnelles, est une fonction incomplètement déterminée
condition à laquelle elle est assujettie et la fait pas correspon-
dances de toutes les valeurs de l'argument. On ne peut
l'imaginer représentée par une figure idéale (une courbe)
une fonction donnée par une loi complète. »

La distance de deux points singuliers voisins d'une forme
anarthroïde n'est pas d'une petitesse illimitée (elle ne dépend
nous) mais bien infiniment petite — Ainsi l'équivalence
trigone des fonctions anarthroïdes est en quelque sorte la représentation
de l'infiniment petit.

Chap. II. Considérations finales sur l'idéalisme et l'empirisme
et sur le concept de limite.

Méthode d'exposition neutre de la théorie des fonctions.

Les deux conceptions sont également logiques et ont la même
Il faut écarter les idées du fini, que l'empiriste rejette
faire l'idéaliste par des raisonnements d'une exactitude
Donc: langage empiriste, preuves idéalistes.

Génie du concept de limite. Discussion de la
il y a union d'un phénomène fixe et d'une suite inter-
(dans l'intuition)

les phénomènes variables, qui pourtant ont pour terme le phénomène fixe.
Le mobile sort de la suite infinie des points $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots$
pour atteindre brusquement, sans transition, le point final 1.

L'expérience nous apprend à distinguer les variations sans limites
des variations finies du temps et de l'espace, des variations limitées (max. & min.)
Le concept scientifique de limite comprend en outre les conditions pour
qu'une suite de valeurs d'une variable aient une limite.
Principe général de convergence et de divergence de Du Bois Reymond
On démontre que la limite d'une variable continue x peut être
considérée comme la limite d'une suite discrète de nombres
écrits sous la forme d'une fraction systématique.

Chap. III. L'argument.

L'argument peut être conçu soit comme un point (extrémité
d'une longueur ayant une origine fixe) soit comme un nombre
mesurant cette longueur par rapport à une unité donnée.)
Quand on partage une longueur en deux parties, il n'y a pas d'ambigü-
ité possible, parce que les 2 parties sont aussi des longueurs
de même nature au tout.) Mais quand on partage une étendue
d'argument, par ex. l'intervalle $(0, 1)$ par un point x_1 ,
il faut indiquer à laquelle des 2 parties appartient le point x_1 ,
car que l'étendue d'argument est conçue comme composée de points.
L'étendue d'argument n'est donc pas une véritable longueur (quoiqu'elle
soit mesurable) mais une suite de
valeurs isolées de l'argument ou soit une) mais une suite de
valeurs ordonnées linéairement suivant leur grandeur, de telle sorte
qu'une valeur déterminée ne s'y présente qu'une fois (comme dans
la suite des nombres entiers). Le mode de constitution empirique ou les
longueurs se composent de points, fournit un image du partage de
l'argument.

Quand un ensemble de points est réparti sur un intervalle de telle sorte que toute partie de l'intervalle, si petite qu'elle soit, contienne de ces points, on l'appelle pantachie.

Si dans aucune partie de l'intervalle, si petite qu'elle soit, il n'y a pas de points, on appelle cette distribution des points non pantachique, on appelle cette distribution apantachie.

Exemple de pantachie: les nombres rationnels; les décimaux; les nombres dyadiques ($\xi = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots$)
 et l'ensemble des valeurs réelles de l'intervalle $(0, 1)$.

Pantachie illimitée (nombre fini de points aussi grand qu'on veut) de manière à en avoir au moins un de tout intervalle (a, b) soit.) Pantachie défective; pantachie complète (c'est-à-dire tous les nombres réels, c'est-à-dire tous les points limites d'une pantachie).

Pantachie infinie (la pantachie complète est infinie, mais non complète, si l'on ^{en retranche} ~~supprime~~ ^{un} point ~~il reste~~ illimitée, par ex. si on supprime tous les points limites).

Apantachies: ^{limites} systèmes isolés & systèmes agglomérés. Points limites; par ex: $\sin \frac{1}{x} = 0$; $\sin \frac{1}{\sin \arcsin x} = 0$; $\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} = 0$; $\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{\sin \arcsin x}} = 0$; $\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}} = 0$; $\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{\sin \arcsin x}}} = 0$; $\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}}} = 0$ etc.

On a ainsi des points de convergence de n^e ordre.

Si l'on supprime les points de convergence de n^e ordre, on obtient des points de convergence de ordre $(n-1)$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un système isolé.

Apantachie mesurable par réduction à un système isolé. Une étendue (α, β) de l'intervalle $(0, 1)$ puis une étendue (α, β) dans les intervalles $(0, \alpha)$ et $(\beta, 1)$ puis une étendue (α, β) dans les intervalles $(0, \alpha)$, (α, β) , $(\beta, 1)$ etc. La somme des étendues

entre égal à 1, pareil si: $\alpha\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma\delta = \varepsilon\zeta = \frac{1}{8}$, etc.

Cas: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

qui inférieure à 1. Or le ^{1er} cas seulement le système est intégrable.
Ensembles ~~denombrables~~ ^{tel} dénombrables (Cantor) c'est qu'à tout nombre
tient corresponde un élément, et que tout élément corresponde à
un nombre entier distinct.

Puissance relative des ensembles. — Les ensembles dénombrables
ont de puissance moindre que le continuum des nombres (Cantor)
la puissance complète.

Au contraire, les puissances infinies ont la même puissance que
la puissance complète (Cantor).

Le concept empiriste d'ensembles illimités est identique au
concept d'ensembles dénombrables.

Pour l'empiriste, il n'y a pas de puissance complète. Le
continuum des nombres n'existe pas pour lui, ni comme limite
des puissances illimitées, ni comme terme final d'une approximation.

Les puissances illimitées suffisent à l'analyse. Nulle part
n'est nécessaire de considérer la puissance complète, le continu.

La continuité étant incompréhensible (pour l'empiriste) la
géométrie et la mécanique décomposent les lignes en éléments,
et les reconstruisent de puissances illimitées de points, qu'un
point mobile est supposé parcourir successivement.

Les puissances complètes ou seulement infinies appartiennent
à l'idéaliste; elles sont hétérogènes aux puissances illimitées, et
elles-ci ne peuvent être considérées comme des approximations
celles-là. — De même que l'infini moins une quantité finie reste
fini, de même la puissance des nombres reste une puissance infinie,
le continuum.

quand on en retire des parentèses illimitées.

Chap. IV. La fonction. Fonctions arithmétiques

Ia. $f(x) = 3x$ pour les valeurs: $0, 3, 0,33, 0,333, \dots$
 $f(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{3}$.

Ib. $f(n) = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ défini pour les val. ent. n

IIa. $f(x) = 1$ pour les valeurs rationnelles de x ;
 $f(x) = 0$ pour les valeurs irrationnelles de x .

IIb. $f(x) = \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_r}$ pour: $x = \frac{Z}{p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_r^{p_r}}$

(p_1, p_2, \dots, p_r nombres premiers, Z, p_1, p_2, \dots, p_r nombres entiers)

$f(x) = 0$ pour toutes les autres valeurs de x .

IIc. $f(x) = x$ pour: $x = \frac{Z}{p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_r^{p_r}}$

$f(x) = 0$ pour toutes les autres valeurs de x .

Fonctions arithmétiques:

III. $\frac{1}{x}, \sin \frac{1}{x}, x \sin \frac{1}{x}, e^{\frac{1}{x}}, \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

IV. $f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 + h x}{1 + h x^2}, f(x) = \operatorname{arctg} h x$

V. $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos m_p x}{\mu^p}$

Valeurs indirectes = limites des valeurs directes de la fonction quand x s'approche indéfiniment d'une valeur directe.
 Ainsi la fonction Ia a pour valeur directe: $f(\frac{1}{3}) = 1$
 et pour valeur indirecte: $f(\frac{1}{3}) = 0$.

Notation de Dirichlet: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + \varepsilon) = f(x+0) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - \varepsilon) = f(x-0)$

$f(x) = \frac{1}{x}$ n'a pas de valeur directe pour $x=0$; elle a deux valeurs
indirectes: $f(x+0) = +\infty$ $f(x-0) = -\infty$.

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ a les valeurs indirectes $f(0+0) = +\infty$, $f(0-0) = 0$.

$f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1+h x}{1+h x^2} = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et 1 pour $x=0$.

et a) valeurs indirectes pour $x=0$: $+\infty$, $-\infty$.

Saut des fonctions = limite de l'oscillation d'une fonction dans
un intervalle infiniment petit entourant le point considéré.

La fonction II a a pour toute valeur de x un saut égal à 1.

Le saut, comme la continuité, peut être unilatéral pour une
valeur donnée, $x-0$ ou $x+0$. - Une fonction est continue en
un point si en ce point le saut a une valeur nulle.

La fonction $x \sin \frac{1}{x}$ ne peut être continue pour $x=0$ que
on lui attribue en ce point la valeur 0 (car $0 \sin \infty$ n'a pas de sens.)

Les fonctions II a, II b ne sont continues en aucun point.

La fonction II c est continue pour tous les points irrationnels,
discontinue pour les points rationnels.

Les fonctions III et IV sont toutes discontinues pour $x=0$.

Les fonctions anorthogonales ne peuvent correspondre à aucun
image (géométrique), et nulle image de fonction ne peut être
visagée comme approximation d'une pareille fonction.

Chap. V. Marche finale des fonctions.

Principe général de convergence et de divergence; limites d'indéterminé
des fonctions pour $x = \infty$ (cf. Stolz, Allgemeine Arithmetik.)

$$\lim f(x) = \frac{0+v}{2} + j \frac{0-v}{2} \quad 0 \leq j \leq 1$$

$f(x) = f(x)$ est continue, j prend toutes les valeurs de l'intervalle $(0, 1)$

Exemples: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cos x$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cos x$. $O = +1$,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1-1}{2} + j \frac{1+1}{2} = j$.

$\varphi(n) = \sin \frac{n\pi}{m}$, $f(x) = \varphi(n)$ pour $n \leq x < n+1$.
 $\varphi(n) = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$ Si m est pair: $\frac{O}{V} = \pm 1$; Si m est impair: $\frac{O}{V} = \pm 1$.

Enveloppes d'indetermination

Soit une fonction $f(x)$ dont l'argument croît indéfiniment, il existe toujours 2 fonctions $O(x)$ et $V(x)$ qui possèdent les propriétés suivantes: 1° Chacune de ces fonctions varie dans un sens mais peut aussi être constante;

2° x croissant indéfiniment, $O(x) - f(x)$ et $f(x) - V(x)$ s'annulent une infinité de fois;

3° On a toujours: $O(x) \geq f(x) \geq V(x)$

Le cas où $f(x)$ varie dans un sens unique: $O(x) = f(x) = V(x)$

4° Lorsque les fonctions $O(x)$ et $V(x)$ ont des limites, les limites d'indetermination O et V de $f(x)$ pour $x \rightarrow \infty$ sont O et V .

Exemples: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cos x$, $O(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $V(x) = -e^{\frac{1}{x}}$
 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cos x$, $O(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $V(x) = -e^{-\frac{1}{x}}$

$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \cos x$, $O(x) = +\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$, $V(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$, $O = V = 0$

24 types de marche d'une fonction ($a =$ augmente, $d =$ diminue, $c =$ constant)

1° $O(x), V(x)$ n'ont pas de limites:	$O(x) =$	$V(x) =$	
	$+\infty$	$+\infty$	1
	$+\infty$	$-\infty$	1
	$-\infty$	$-\infty$	1
2° $O(x)$ ou $V(x)$ a une limite:	$O(x) =$	$V(x) =$	
	$+\infty$	a, d, c	3
	a, d, c	$-\infty$	3
3° $O(x)$ et $V(x)$ ont chacune une limite: $O > V$	$O(x) =$	$V(x) =$	
	a, d, c	a, d, c	9
4° $O(x) = V(x)$ ont la même limite: $O = V$	$O(x) =$	$V(x) =$	
	a, d, c	a, d, c	1
5° $O(x) = f(x) = V(x)$	$O(x) =$	$V(x) =$	
	a, d, c	a, d, c	1

Calcul infinitaire. Soient 2 fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ croissant indéfiniment. On dit que $f(x)$ croît plus vite que $\varphi(x)$, si à partir d'une certaine valeur de x on a toujours: $f(x) > \varphi(x)$, et si la différence $f(x) - \varphi(x)$ augmente avec x .

On écrit: $f(x) \inf > \varphi(x)$, si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$.
 $f(x) \inf < \varphi(x)$, si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.
 $f(x) \inf = \varphi(x)$, si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est finie } pour $x = \infty$.

Les mêmes notations serviraient pour le cas où les 2 fonctions croissent indéfiniment.

On peut ranger les fonctions par ordre d'inégalité infinitaire: $(\log_3 x)^n, (\log_2 x)^n, (\log x)^n, x^n, \dots, e^{\mu x^k}, \dots, e^{\mu_1 x^k}, \dots$

Le quotient d'une fonction à la précédente sera même à $\frac{x}{\log x}$ ou $\frac{e^x}{x}$, plus généralement à:

$$\text{Or } e^{\mu x^k} = \sum \frac{\mu^n x^{nk}}{n!} \quad \frac{e^{\mu x^k}}{x^m} = \sum \frac{\mu^n x^{nk-m}}{n!}$$

si grand que soit m et si petit que soit k , $(nk-m)$ finit par devenir positif pour n suffisamment grand, la limite est l'infini. De même: $\frac{e^{\mu_1 x^k}}{e^{\mu x^k}}$

Prendons le logarithme: $\mu x^k \left[\frac{\mu_1 e^{\mu_1 x^k}}{\mu x^k} - 1 \right]$

devient infini avec x , d'après ce qui précède.

Soient deux fonctions u_1, u_2 , telles que: $u_1 \inf < u_2$,
 on peut intercaler une infinité de fonctions inégalement infinies.

$$u_1 \text{ inf} < u_1 \cdot v^k (\log v)^{m_1} (\log_2 v)^{m_2} \dots (\log_k v)^{m_k} \text{ inf} < u_2$$

On peut aussi insérer de nouveaux termes infinitaires en les paramétrisant par des fonctions; par exemple: $(\log x)^m \text{ inf} < (\log x)^k (\log x)^m \text{ inf} < x^m$

La suite de ces fonctions inégalement infinies constitue la pantachie infinitaire. Toutes les fonctions $q(x)$ qui forment avec $f(x)$ un point infinaire (comme également l'équation infinitaire: $q(x) \text{ inf} = f(x)$)

La suite des points infinitaires forme ~~un~~ un continu infini infiniment plus dense que le continu linéaire (pantachie

Si l'on coupe les courbes représentatives des fonctions d'une droite perpendiculaire à Ox , qu'on rejette à l'infini, de cette droite sous l'équivalent géométrique de la pantachie

L'auteur croit que la pantachie infinitaire est d'une puissance supérieure à la pantachie complète (ensemble des nombres

(cf. Stolz, Allgemeine Arithmetik, t. I, ch. IX.)

Paul du Bois Reymond, à Tübingue.

Ueber asymptotische Werte, infinitäre Approximationen
und infinitäre Auflösung von Gleichungen

ap. Mathematische Annalen, t. VIII. 1875.

Cf. Sur la grandeur relative des infinis des fonctions,

ap. Annali di Matematica, Serie IIa, t. IV, p. 338.

et: Théorème général concernant la grandeur relative des
infinis des fonctions et de leurs dérivées.

ap. Journal de Borchardt, t. 74, p. 244.

Les divers infinis des fonctions forment un domaine de
grandeurs, dit infinitaire.

L'infini de $\varphi(x)$ est dit égal à celui de $\psi(x)$, ou Supérieur,

lorsqu'il régit: $\varphi(x) \sim \psi(x)$, $\varphi(x) \succ \psi(x)$

suivant que le quotient: $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ est fini ou infini.

Le quotient joue le même rôle que la différence parmi les
nombres ordinaires. Symétrie du Devenir nul et du Devenir-
infini: aux fonctions qui deviennent infinies correspondent les
nombres positifs, aux fonctions qui deviennent nulles, les
nombres négatifs, aux fonctions qui restent finies, le zéro.
Les points fixes du domaine infinitaire sont les fonctions
exponentielles, les puissances et les logarithmes, qui jouent le
même rôle que les nombres dans le domaine des nombres.

On ne peut pas en former un infini ^{sans} donner entre deux infinis
de cet ensemble (commun ou enfermé un nombre quel que entre deux
autres) car il y a des décroissements tellement lents qu'ils restent
au-dessus de $\log \log \log \dots \log x$ (si nombreux qu'ils soient le \log)

Cf. Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen...

ap. Journal de Borchardt, t. 76.

et des accroissements si rapides qu'ils dépassent toute
exponentielle (noch so hoch gehührende) :

On ne peut trouver aucune fonction $\lambda(x)$ telle, qu'on
puisse former avec elle une fonction $\lambda(\lambda(\lambda(\dots \lambda(x))))$
qui dépasse tout infini, si grand ou si petit qu'il soit.

« Cette recherche des infinis des fonctions est née du besoin
de démontrer ^{d'une manière} générale certaines propositions sur la convergence
et la divergence des séries de Fourier, en tenant compte
de leur domaine de validité. »

- De même qu'on considère le devenir nul de la différence

$$f(x+a) - f(x)$$

quand x restant fini, a devient infiniment petit, on peut
rechercher comment cette différence se comporte dans le cas
quand x devient infiniment grand et a reste fini, ou
est d'un infini plus inférieur à x .

I. Formules pour les valeurs asymptotiques finies.

1. Formules fondamentales simples pour val. asympt.

De la formule de Lagrange:

$$f(x+a) = f(x) + a f'(x) + \frac{a^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{a^n}{n!} f^{(n)}(x) \quad (0 < a < \infty)$$

Il résulte pour $n=1$ et $x=\infty$, à la condition que:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ soit finie et déterminée:

$$(I) \quad \lim [f(x+a) - f(x)] = a \lim f'(x)$$

$$(II) \quad \lim \frac{f(x)}{x} = \lim f'(x)$$

car: $f'(x+a) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left[\frac{f(x+a)}{x+a} - \frac{f(x)}{x+a} \right] \quad (\alpha)$

on bon fait α , puis x infini.

En général, pourvu que $f^{(n)}(\infty)$ soit finie et déterminée, on a:

$$r^n) \quad \lim [f(x+a) - f(x) - a f'(x) - \dots - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)] = \frac{1}{n!} \lim f^{(n)}(x)$$

$$(II^n) \quad \lim \frac{f(x)}{x^n} = \frac{1}{n!} \lim f^{(n)}(x)$$

Cette-ci résulte de:

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x+a) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n \left[\frac{f(x+a)}{(x+a)^n} - \frac{f(x) + a f'(x) + \dots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)}{(x+a)^n} \right]$$

Si dans (α) on fait x , puis a nul ou s'annule.

$$(II_0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \quad \text{Si: } f(0) = 0$$

En général: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{Si: } f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0.$

2. Formules de limites déduites des précédentes.

$$(I_a) \quad \lim \frac{f(x+a)}{f(x)} = e \quad \text{alim } \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(II_a) \quad \lim f(x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(II_{a0}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{f'(0)}{f(0)}} \quad \text{Si: } f(0) = 1$$



$$\begin{aligned}
(I') \quad & \lim [f(ax) - f(x)] = \log a \lim x f'(x) \\
(I'') \quad & \lim [f(x^a) - f(x)] = \log a \lim x \log x f'(x) \\
(I'_a) \quad & \lim \frac{f(ax)}{f(x)} = a^{\lim x \frac{f'(x)}{f(x)}} \\
(I''_a) \quad & \lim \frac{f(x^a)}{f(x)} = a^{\lim x \log x \frac{f'(x)}{f(x)}} \\
(II^n) \quad & \lim \frac{f(x)}{\log_n x} = \lim x \log x \dots \log_{n-1} x f'(x) \\
(II'_a) \quad & \lim f(x)^{\frac{1}{\log_n x}} = e^{\lim x \log x \dots \log_{n-1} x \frac{f'(x)}{f(x)}} \\
(III) \quad & \lim [f(x+a) - f(x)] = a \lim \frac{f(x)}{x} \\
(III') \quad & \lim [f(ax) - f(x)] = \log a \lim \frac{f(x)}{\log x} \\
(III'') \quad & \lim [f(x^a) - f(x)] = \log a \lim \frac{f(x)}{\log \log x} \\
(III'_a) \quad & \lim \frac{f(x+a)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{a}{x}} \\
(III'_a) \quad & \lim \frac{f(ax)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{\log a}{\log x}} \\
(III''_a) \quad & \lim \frac{f(x^a)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{\log a}{\log \log x}}
\end{aligned}$$

On trouve d'autres formules de limites pour $x=0$.
 (Les précédentes sont pour $x=\infty$)

Paul du Bois-Reymond: Zwei Sätze über Grenzwerte
von Functionen zweier Veränderlichen

op Mathematische Annalen t. XI (1877)

1. Function de deux variables:

$$u = f(x, y)$$

Pour valeur de $f(x, y)$ on prendra la plus grande, en valeur absolue, de celles de:

$$f(x \pm \varepsilon, y \pm \varepsilon_1)$$

quand $\varepsilon, \varepsilon_1$ tendent vers zéro, soit l'un après l'autre, soit en même temps suivant une loi quelconque.

$f(y)$ est la fonction à une variable qu'on obtient en fixant x .
Grundsatz: Si une fonction $f(y)$ ~~remplit~~ ^{satisfait} la condition:

$$\lim_{y=0} f(y) = 0$$

il y a toujours une valeur y_1 qui vérifie les relations suivantes:

1° $0 < y_1 \leq \varepsilon$ (ε nombre positif aussi petit qu'on veut),

2° $[f(y_1)]^2 \leq \varepsilon$ (ε nombre positif quelconque)

3° $[f(y)]^2 \leq [f(y_1)]^2$ pour toute valeur y de l'intervalle $(0, y_1)$

2. Proposition I. Si pour toute valeur x de l'intervalle $(0, X)$ la fonction $f(x, y)$, considérée comme fonction de y , remplit la condition:

$$\lim_{y=0} f(x, y) = 0$$

de sorte qu'on a aussi: $\lim_{x=0} \left[\lim_{y=0} f(x, y) \right] = 0$

il y a toujours une fonction $\varphi(x)$ qui a comme seule maxima avec x , et telle que: 1° $\lim_{x=0} f(x, \varphi(x)) = 0$

2° $\lim_{x=0} f(x, \varphi_1(x)) = 0$

à la condition qu'en dessous d'une certaine valeur de x on ait, toujours:

$$\varphi_1(x) < \varphi(x)$$

Of Journal de Borchardt, t. 70: (Bemerkungen über verschiedene Werte, welche eine Function zweier reellen Functionen erhält, wenn man diese Variablen entweder nach einander oder gewissen Bedingungen gemäß gleichzeitig verwerthet.) § 8.

3. Proposition II. Soit pour une fonction $\lambda(x)$ qui s'annule avec x , ainsi que pour toute fonction $\lambda_1(x) < \lambda(x)$ on a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda(x)) = 0$$

on a aussi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y=0} f(x, y) \right] = 0$$

4. Problème. Quand, de ce que: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y=0} f(x, y) \right] = 0$ il résulte qu'il y a des fonctions $\varphi(x)$ pour lesquelles on a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \varphi(x)) = 0$$

quel est le plus grand zéro de ces fonctions, ou le plus petit infini des fonctions réciproques?

Ueber die Paradoxen des Infinitärcalculs.

Les concepts de grandeur et de limite épuisent l'énigme psychologique ~~entière~~ ^{qui sert de matière à} la science entière.

Introduction des nombres irrationnels pour exprimer une grandeur qu'aucun nombre rationnel ne peut représenter. Confusion complète des nombres rationnels et irrationnels dans l'analyse, de même qu'ils se représentent l'un au irrat. en Géométrie. La représentation géométrique ne fait aucun différence sur un segment par ex. égal à 1, entre les fractions ^{rationnelles} de l'unité et les longueurs irrationnelles qu'on peut construire avec la règle et le compas. Comparaison de la suite des nombres avec la répartition des étoiles dans le ciel.....

De même les nombres rationnels se passent de plus en plus serrés, mais laissent toujours entre eux dans la représentation ^{deux et} des lacunes, que la spéculation mathématique remplit alors avec les irrationnels. Ainsi se développe la représentation de la continuité numérique. Les deux suites de grandeurs, numériques et géométriques, coïncident parfaitement. Mais elles ne peuvent être amenées à coïncider qu'à l'aide du concept de limite, et par l'introduction de l'irrationnel. C'est la origine de la pensée de l'identité des concepts de grandeur et de limite (cf. Cantor.)

Après cela, nous pouvons ne voir dans l'intercalation des nombres irrationnels entre les rationnels qu'une adaptation faite après coup (1) du concept intellectuel de nombre au concept de grandeur géométrique.....

L'auteur se propose de montrer que les infinis des fonctions forment une multitude infiniment plus dense que le continu géométrique; et de rechercher la limite idéale entre la convergence et la divergence, en définissant avec précision la fonction $\tau(x)$.

⊕ et se correspondent complètement l'une à l'autre, comme le modèle et la copie.
(1) eine nachträgliche Anpassung. (Wie Bild und Abbild.)

Sur l'approximation d'un infini donné.

1. Les paradoxes qu'on rencontre dans les principes du calcul infini, comme ceux des éléments de l'analyse résultent du contraste entre les nouveaux concepts de nombres et de grandeurs, que l'on s'efforce d'amener à coïncider.
2. Les infinis des fonctions forment, dans l'initiation géométrique, une continuité; de plus, leur nombre est infiniment infini, car entre deux courbes allant à l'infini si l'on s'en rapproche qu'elle soient, on peut en faire passer une infinité.
3. De même que dans le domaine des grandeurs finies on ne peut représenter ~~exactement~~ ^{non numériquement} exactes des grandeurs qu'au moyen des ^{donner une} nombres rationnels (les irrationnels n'étant que des limites), on ne peut exprimer les infinis que par des fonctions bien définies, logarithmes, puissances, exponentielles; qui constituent déjà un ensemble infini.

4. On sait (v. t. VIII) qu'il ne peut y avoir aucune suite de fonctions: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x), \dots$

telle que tout infini, si petit qu'il soit, tombe entre deux infinis de cette suite ou coïncide avec l'un d'eux.

5. Dans les grandeurs finies, on peut approcher indéfiniment d'une valeur quelconque. Dans les infinis, l'approximation n'est pas infinie. — Par ex. on approche de la valeur 1 par la suite: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

mais on ne peut pas approcher de x par la suite de fonctions

$$x^0, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{3}{4}}, \dots, x^{\frac{n}{n+1}}, \dots$$

il y a toujours des infinis compris entre ceux-là et celui de x

par ex: $x^{\frac{n}{n+1}} < x^{\frac{n}{n+1}} < x$

Proposition : On ne peut s'approcher d'un infini donné $\lambda(x)$ par aucune suite de fonctions : $Q_p(x)$ $p = 1, 2, \dots$ de telle manière, qu'on ne puisse pas toujours trouver des fonctions $\psi(x)$ qui, pour des valeurs de p aussi grandes qu'on veut, satisfont à l'inégalité : $\lambda(x) > \psi(x) > Q_p(x)$

7. Sous la condition que : $p(x) < \log x$ on a pour toute valeur de \underline{n} :

$$x^{\frac{n}{n+1}} < x^{\frac{p(x)}{p(x)+1}} < x$$

8. On ne peut pas plus arriver à une approximation indéfinie d'un infini donné par une suite doublement, triplement, ... infinie de fonctions, que par une suite simplement infinie.

9. Cela fait semblant en contradiction avec la continuité intuitive, qui n'admet aucune lacune aux environs d'une courbe, par ex de la droite : $y = x$, que ne puisse combler une infinité de courbes infiniment voisines.

L'infini de la fonction : $x^{\frac{\log x}{\log x + 1}}$ est plus rapproché de celui de x que celui de la fonction :

$$x^{\frac{n}{n+1}}$$

si grand que soit \underline{n} ;

mais pour chaque valeur de x il y a une valeur de \underline{n} telle, que :

$$x^{\frac{n}{n+1}} > x^{\frac{\log x}{\log x + 1}}$$

Ainsi les courbes $y = x^{\frac{n}{n+1}}$ s'approchent infiniment de la ligne droite $y = x$, de sorte que dans le fini on ne peut intercaler aucune courbe entre la droite et la suite des courbes ($n = 1, 2, \dots$)

Mais, à l'infini, au contraire, on a :

$$x^{\frac{\log x}{\log x + 1}} > x^{\frac{n}{n+1}}$$

Pour n'importe quelle valeur de \underline{n} .

Ainsi s'explique ce paradoxe, qui n'est pas une contradiction. C'est une lacune dans l'analogie des grandeurs ordinaires et infinitaires.

II. Sur la limite de la convergence et de la divergence

10. On va rencontrer un autre paradoxe, qui résulte, au contraire de l'analogie des grandeurs numériques et des gr. infinitésimales. On sera obligé d'admettre l'existence d'un certain infini, pour éviter des absurdités analytiques, et d'autre part on peut prouver rigoureusement que cet infini n'existe pas, car il ne peut être représenté par aucune fonction.

Cet infini irréprésentable, mais réel, correspond précisément à la limite entre la convergence et la divergence des opérations infinies (intégrales et séries).

11. Considérons l'intégrale:

$$I = \int_0^a \frac{t(\alpha)}{\alpha} d\alpha$$

$t(\alpha)$ se tend vers maxima vers $t(0)$

quand α tend vers 0. Donc:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^a \frac{t(\alpha)}{\alpha} d\alpha$$

infini, lorsque $t(\alpha) \sim 1$.

On considérera donc seulement les fonctions: $t(\alpha) < 1$, et qui ne croissent jamais de $t(\alpha)$ à $t(0)$. I sera fini ou infini.

Ji suppose:
$$t_n(\alpha) = \frac{1}{\ln \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} \dots \ln \frac{1}{\alpha}}$$

$$t_0(\alpha) = \frac{1}{\ln \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} \dots \ln \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}} \quad \mu > 0$$

I sera infini dans le 1^{er} cas, fini dans le 2^e, si grand que soit ϵ , si petit que soit μ .

Si l'on conçoit que $t(\alpha)$ parcoure tous les degrés de la vitesse de devenir nul, depuis $t_n(\alpha)$ jusqu'à $t_0(\alpha)$, il y aura un moment où l'intégrale I de finie, deviendra infinie. Ce moment la fonction $t(\alpha)$ est $t(\alpha)$: c'est la limite qui sépare les fonctions $t(\alpha)$ pour lesquelles I est finie de celles qui tendent I infinie.

On bien I est finie pour $t \gtrsim \tau$ et infini pour $t \lesssim \tau$
ou bien I est finie pour $t \lesssim \tau$ et infini pour $t \gtrsim \tau$

12. Il n'y a aucune fonction τ qui vérifie la 1^{re} hypothèse.

14. Il n'y a aucune fonction τ qui vérifie la 2^e hypothèse.

16. Donc, à moins de supposer que pour $\tau(x)$ l'intégrale \int n'est ni finie ni infinie, la limite de divergence et de convergence ne peut se représenter par aucune fonction.

On a déjà prouvé (Borchardt, 6. 76) qu'on ne peut approcher indéfiniment de cette fonction-limite $\tau(x)$ au moyen des critères logarithmiques. Il est maintenant démontré qu'elle n'existe pas.

D'autre part, en vertu de notre représentation immédiate des grandeurs comme continues (par l'intersection géométrique) on ne peut admettre qu'il n'y ait pas de degrés immédiats formant une transition continue entre le devenir nul de :

$$\frac{1}{x} \log \frac{1}{x} \dots \log \frac{1}{x} \quad \text{et de :} \quad \frac{1}{x} \log \frac{1}{x} \dots \log \left(\frac{1}{x} \right)^{1+\mu}$$

On peut lever cette contradiction qu'à l'aide de l'analogie avec les nombres : les fonctions qui deviennent infinies sont comparables aux nombres rationnels ; elles sont les véritables grandeurs infinitésimales, mais elles ne le sont pas les limites. Les logarithmes, les puissances, les exponentielles, et en général toute loi de croissance régulière à bref délai, constituent l'infini rationnel.

Le même qu, malgré la densité illimitée (la connexité) de la suite des nombres rationnels, on est obligé pour des raisons géométriques et analytiques d'admettre des grandeurs non exprimables par ces nombres ; de même, dans la suite des grandeurs infinitésimales, on est amené à concevoir une façon de croître indéfiniment qui n'est pas susceptible de représentation analytique.

La limite idéale entre la convergence et la divergence est un infini irrationnel. La fonction τ est comparable au nombre π , qui désigne une grandeur qu'on enferme entre une double suite de grandeurs exprimables par des nombres rationnels.

17. L'introduction de l'irrationalité $\tau(x)$ dans le calcul est moins choquante, si l'on entend par $\tau(x)$, non la limite exacte de convergence ou de divergence, mais ~~une fonction~~ ^{un fini} qui s'en approche plus que toutes les fonctions dont nous disposons. Il suffit d'imaginer une fonction $\tau(x)$ qui vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \frac{1}{x_3} \dots \frac{1}{x_n} < \tau(x) < \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x} \dots \frac{1}{x^{1+p}}$$

pour toute valeur finie de x , et pour x aussi petit qu'on veut.

L'introduction de la fonction $\tau(x)$ dans le calcul infini est très utile, parce qu'on peut calculer avec elle sans la commode et qu'on peut éliminer des relations infinitaires par la différentiation.

À ceux qui croient impossible un calcul portant sur des nombres sans suite, l'auteur répond qu'on peut toujours définir des opérations de calcul avec des éléments auxquels on assigne un certain ordre. Depuis longtemps, en Géométrie, on a pensé à constituer une Géométrie indépendante de la mesure du longueur, et cette idée a été réalisée de nos jours par Poncelet, Riemann, Listing, etc. Le même dans l'analyse le usage de l'infini doit s'incorporer dans une méthode de calcul sans nombres.

el
cit
qu
on
le
ut
av
ca

lu

tes

y

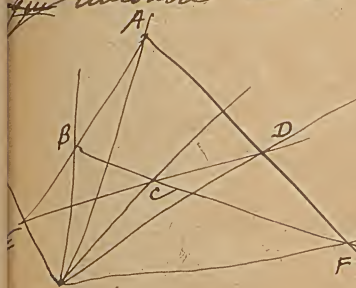
Chasles. — Notes.

II. ~~Construction des spirales comme intersections de la~~
~~surface hélicoïdale et d'une surface de révolution, et~~
~~correspondance des spirales avec les méridiennes des ces~~
~~surfaces de révolution.~~

~~Involutions de C de.~~

~~Les C de, menés d'un même p. à 3 coniques inscrites ds~~
~~un quadril. forment un faisceau en involution.~~

~~En partie : les C de, menés d'un même p. aux 4 sommets~~
~~d'un p. de con. ds un quadril. complet forment~~
~~un faisceau en involution ; donc toute transversale~~
~~qui rencontre ces C de en 4 p. qui sont en involution~~



~~Maurolicus : de lineis horariis lib. III~~

~~(1553, 1575). La pointe du style~~
~~donne une conique~~

~~Usage de lettres en Arithmétique~~

~~Quarini : Euclides adauctus et methodicus~~

~~mathematica universalis (Turin, 1671.)~~

~~Mathematica celestis (Milan, 1683.)~~

~~Placita phitarophica (Paris, 1666.)~~

Chasles: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1837)
Seconde édition, Gauthier Villars, 1875.

l'époque

Thalès (639 - 548)

Pythagore (580 -) Incommensurables; corps réguliers.

Carre de la hypoténuse

Platon (430 - 347) Sections coniques; lieux géométriques.

Hippocrate de Chio (450) Quadrature des lunules.

Duplication du cube; trisection de l'angle

Ménechme, Eudoxe, disciples de Platon.

Archytas: 1^{re} courbe à double courbure.

Aristée (350) sections coniques.

Dimosthène: quadratrice (pour la division des angles & la quadrature du cercle) [frère de Ménechme]

Périsseus: Spiriques.

Euclide (285) Éléments; Data. - Sections coniques; lieux à la surface; porismes.

Archimède (287 - 212) Quadrature de la parabole.

Spirales, II.

Apollonius (247) Coniques. Maxima et minima

Cratosthène (276 -) Mésolabe (2 livres, proportion)

Nicomède (150) Conchoïde

Hipparque (150) Astronomie: trigonométrie sphérique

Geminus (100) Helice circulaire

Théodose (100) Sphériques.

Ménetasius (80 ap. J.C.) Sphériques. Règle de intersection
(ou des transversales à un triangle sphérique)

Ptolémée (125 ap. J. C.) Astronomie (trigonométrie rectiligne et sphérique) Théorie sur le quadrilatère inscrit
Théorie des segments (de transversales) du plan et de la sphère. - Théorie des projections - Optique.

Pappus (fin du IV^e) Collection mathématiques.
Spirale sphérique - Surfaces plectoïdes. Relation
Rapport anharmonique. Problème ad tres aut plures locos
Involution de 5 points.

Serenus; Sections du cylindre et du cône.

Dioclès; Cissoïde (2 moy. prop.)

Proclus (412 - 485.) Commentaire sur Euclide (sur les 13 livres)

Marinus; préface aux Data d'Euclide.

Isidore de Milet; description continue de la géométrie

Eutocius (540) Commentaires sur Apollonius d'Apollonie
Citations précieuses des anciens géomètres.

Héron d'Alexandrie;

Pneumatiques. Dioptrique
Περὶ διοπτρῆς
(Géométrie)

Deuxième époque.

Viète (1540-1603) Algèbre construction géométrique
des racines du 2^e et du 3^e degré. — Apollonius Gallus.

Cercle tangent à 3 cercles donnés. Téléstiques.

Trigonométrie sphérique; triangles réciproques.

Snellius invente le triangle sphérique supplémentaire

(Trigonometrie, 1627, posthume.) Harmonices mundi l. V (1619.)

Kepler (1571-1631) Nova stereometria solidorum (1615.)

Maxima et minima. Méthode des projections.

Nepes: Meropici logarithmorum canonis descriptio (1614.)

Guldin (1577-1643) règle renouvelée de Pappus (centre de gravité)

Cavalieri (1598-1647) Géométrie des Indivisibles (1635.)

Directorium generale uranometricum (1632.)

Trigonometrie (1643.)

Roberval (1602-1673.) Méthode des tangentes, par les
mouvements composés. — Traité des Indivisibles. De resolutione
æquationum.

Fermat (1590-1663) De maximis et minimis.

Méthode des tangentes (en annulant les différentielles.)

Calcul des probabilités — Théorie des nombres.

Quadratures et rectifications; De linearum curvarum
cum lineis rectis comparatione (1660.) Réfraction.

Méthode analytique de construction des lieux par coordonnées.

De contactibus sphericis. — Porismes d'Euclide.

Pascal (1623-1662.) Cycloïde (par les indivisibles.)

Congus; hexagramme mystique.

Desargues (1593-1662) Coniques : perspective
transversales. Parallèles = droites concourant à l'infini
(adopté par Descartes, Leibniz et Newton) Système
lignes droites assimilés à des lignes courbes.

Involution de 6 points. Traité de Perspective
Triangles homologues. La Coupe des pierres; les Cadres
Epicycloïdes (dans les engrenages)

[J. Curabelle: Examen des œuvres du Sieur Desargues, Paris 1667]

Mydorge (1587-1647) Coniques (1631, 1641.)

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) Quadrature
Ductus plani in planum. Transformation du cercle en

Albert Girard, dans sa Trigonométrie (1626) fait usage
du triangle réciproque. ^{Lattage} Commentaire des œuvres de Simon Stevin
Desargues a conçu les angles trièdres supplémentaires et
résolue graphiquement les problèmes de la trigonométrie sphérique.

Troisième époque

Descartes (1596-1650) Géométrie (Leyde, 1637)

Racines négatives. — Coefficients indéterminés.

De Beaune (1601-16) Méthode inverse des tangentes

Schooten (— 1659.) Exercitationes geometricae

Description organique des coniques (Proclus, Guido Ubaldi, Stevin.) — Géométrie de la règle

Sluse (1623-1685) Construction des eq. du 3^e et du 4^e degré

Hudde (1640-1704) Tangentes

Jean de Witt (1625-1672) Description des coniques par la ligne droite

Wallis (1616-1703) Traité analytique des sections coniques.
Arithmétique des infinis.

Van Heuraet et Neil : Rectification d'une courbe.
(la parabole cubique)

Huygens (1629-1695) Rectification de la cissoïde.
Surface des conoïdes. Spirale logarithmique. Chainette.

De horologio oscillatorio. La cycloïde tautochrone

Développées. Centre d'oscillation. Force centrifuge

Traité de la Lumière. Surfaces du second degré. Onde réfractée (oval de Descartes)

Choc des corps (Wallis, Wren) Astronomie

Barrow (1630-1677) Lectiones Geometricae (1669)

Méthode des tangentes. Trad. Euclid, Apollonius, Archimède

Lectiones mathematicae (1684.) Lectiones opticae (et Théodore)

Tschirnhausen (1651-1708) Caustiques. Medicina
(1686) Génération universelle des courbes; ^{construction des} méthode de
des courbes mécaniques, sans infiniment petits.

[Géométrie des anciens; géométrie analytique (Descartes); géométrie projective et descriptive (moderne, date de Pascal, Desargues de Monge et Carnot.)]

La Hire (1640-1718.) travaille dans la géométrie des
et dans la géométrie moderne (pure) Sectiones conicae
Epicycloides; Traité des roulettes. Conchoïdes. Gnomon
Continuateur de Pascal et Desargues de la théorie des
(Précurseurs: Verner, de Nuremberg (1522) Maurolicus
Messina [Venise, 1575] Guarini, 1671.) Théorie des
Planicomiques (1673) méthode de transformation des figures

Le Poivre (de Mons) Traité des sections du cylindre et du cône
(1704.) Sans recourir au plan sécant.

La méthode de transformation de La Hire et Le Poivre
posée, directrice et formatrice) n'est qu'une forme de perspective
(cf. théorie des figures homologues de Poncelet)

Parent (1666-1716) représente une surface paramétrée
à 3 variables (coordonnées de l'espace; géométrie analytique
dimensions. - 1700)

Clairaut (1713-1765) Courbes à double courbure
dénommées d'après

Pitot (1695-1771) Helice circulaire (1724.)

[Torodromie étudiée par Novius (1492-1577) en 1530
Wright, Stevin, Snellius; c'est la projection stéréographique
de la spirale logarithmique, selon Halley.
La cyclo-cylindrique inventée par Rothwald (1630)

par La Loubière (1600-1664.)

Spirale conique étudiée par Pascal.

L.P. Courcier étudie les sections de la sphère par la sphère, le cylindre et le cône (1663.)

Viriani (1622-1703) propose le problème de la voûte quarrable, résolu par Wallis, Leibniz et Bernoulli.

Herman (1678-1733) invente l'épicycloïde sphérique (1718) courbe rectifiable.

Guido Grandi (1671-1742) étudie 2 courbes quarrables sur la sphère.

L'Hospital: Traité analytique des sections coniques.

Analyse des infiniment petits.

L.P. Nicolas: Conchoïdes et cissoïdes (Toulouse, 1692)

Jean Ceva: De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio (Milan, 1678.)

Quatrième époque

Invention du calcul infinitésimal (1684, 1687)

Newton (1642-1727) Transformation des figures

Enumeratio linearum tertii ordinis (1706)

correspondant aux 5 paraboles dont toutes les autres sont
sous des projections centrales. Description organique du

Mac-Laurin (1698-1746) Geometria organica (1704)

De linearum geometricarum proprietatibus generalibus

Théorème sur la déformation réglée d'un polygone

Cotes (1682-1716) Th. sur le centre des moyennes harmoniques

Braikenridge : Exercitatio geometrica de descriptione

linearum curvarum (1733)

Nicole démontre l'Élé. de Newton sur les courbes du 3^e ordre

Brasgelongue (1688-1744) Courbes du 4^e degré

De Gua (1712-1786) Usage de l'analyse de Descartes

Points singuliers à l'infini / analogie par perspective

Euler (1707-1783) Introductio in analysin infinitorum

(1748) Surfaces du 2^e degré.

Cramer (1704-1752) Introduction à l'analyse

des courbes algébriques (1750)

Gionys du Séjour (1734-1794) et Goudin (1734-1794)

Traité des courbes algébriques (1756)

Goudin seul. Traité des propriétés communes à toutes les

Waring (1734-1798) Miscellanea analytica

Proprietates geometricarum curvarum (1772)

v. p. 2.

Halley (1656-1742) Trad. les Coniques d'Apollonius,
le De sectione rationis; restitué le De sectione spatii.

Newton; Arithmetica universalis, Principia philosophiæ
naturalis mathematicæ. Propriétés des coniques. Rectifi-
cation des épicycloïdes. Orales de Descartes.

Mac-Laurin: Traité des fluxions - Figure de la Terre: attrac-
tion d'un ellipsoïde de révolution - Problème des forces
centrales donnant une trajectoire elliptique.

Simson (1687-1768) Traité des Sections coniques.

Traité des Porismes; Section déterminée. Deux plans d'Apoll.
Trad. des Œuvres de Pappus.

Stewart (1717-1785) Aggrégation théorèmes généraux (1746)

Traité de physique et de mathématique (1761). Distance de
la Terre au Soleil (erreur corrigée par Dawson, 1769, & Landau, 1771)

Propositions géométriques, more veterum demonstratæ (1763)

Théorème sur 4 points, dont 3 en ligne droite:

$$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot AC - DC^2 \cdot AB = AB \cdot AC \cdot BC.$$

(employé par R. Simson, Th. Simpson, Euler, John Leslie)

(cas particulier d'une relation générale entre 5 points en ligne droite)

Théorèmes arithmétiques sur les polygones réguliers, les points et droites.

Involutions sur une transversale au quadrilatère - Description
du cercle par l'intersection de 2 droites (coupant une transversale)

Lambert (1728-1777) Traité de Perspective, Traité des Coniques (1761)
(1759)

Cinquième époque

Monge. - Géométrie descriptive. Relations réciproques entre la géométrie plane et la géométrie de l'espace. Transmutations des figures à 3 dimensions en figures planes. Démonstration par les figures contingentes (la propriété remarquable quand ces figures deviennent imaginaires). Cette méthode se justifie par la généralité de la dualité. Les théorèmes concernant les parties intégrantes d'un système sont indépendants des parties contingentes/pourvu qu'on ne considère pas les cas particuliers de construction. Le principe des relations contingentes se rattache au principe de continuité de Poncelet.

Il vaut mieux définir une figure par ses propriétés essentielles et permanentes que par ses propriétés contingentes accidentelles (ex: axe radical de 2 cercles). Le principe des relations contingentes justifie l'emploi des imaginaires en géométrie.

Style de Monge: géométrie sans figures.

Solution de problèmes de dualité par la géométrie. Intégration des eq. différentielles représentant des surfaces.

Carnot. - Géométrie de position. Th. des transversales. [Distinction des relations descriptives et métriques.] On développe la géométrie métrique comme Monge avait développé la géométrie descriptive. Tous deux continuent de Pascal - Traité de la Corrélation des figures.

Cousinery. - Géométrie perspective (un seul plan de projection). Lacroix. - Essais sur les plans et surfaces (1795) Géométrie descriptive.

Poncelet: Traité des Propriétés projectives des figures.

Principe de continuité; polaires réciproques; homologie.

Serres: Géométrie de la règle.

Ch. Dupin: Ch. géom. de la courbure des surfaces (par la géométrie pure)

Hachette: Géométrie à 3 dimensions - Géom. descriptive.

Brianchon: Signes du 2^e ordre - Th. des transversales.

Géométrie de la règle (Mascheroni, Géom. du compas, 1797.)

[Cardan, Tartaglia et J. B. de Benedictis ont traité des problèmes avec la règle et un seul ou cit un de compas]

4 doctrines principales dans la Géométrie pure moderne:

- 1^o Transversales; 2^o Transformations (perspectives & projectives);
- 3^o Polaires réciproques; 4^o Projections stéréographiques.

Ajoutons: Th. des tangentes conjuguées, de Ch. Dupin;
Th. des caustiques, de Quételet.

Connexion entre la dualité des figures sphériques et la théorie des polaires réciproques (projection centrale de la sphère sur un plan)

Géométrie de la sphère: Lexell, Fuss (ellipse sphérique)

Schubert (trigonométrie sphérique déduite du th. de Ptolémée.)

Sorlin (dualité des figures sphériques.) Magnus, Chrestien, Gergonne, Quérard d'Annonville (analogie avec la géom. plane)

Quételet - Steiner, Gudermann (Crelle, II, VI.)

Théorie des surfaces du second degré: Euler - Monge &

Hachette Binet, Ch. Dupin (Les propriétés des coniques rentrent comme cas particuliers dans celles des surfaces du 2^e degré.)

Lami (construire une surf. du 2^e d. passant par 9 points donnés.)

Question: relation entre 10 points d'une surf. du 2^e degré.

Courbes à double courbure du 3^e et du 4^e degré:
Hachette, Poncelet, Giquet.

Travaux de la Géométrie et de ses applications aux
phénomènes physiques: Poisson Rotation des
(méthode purement géométrique)

La théorie des polaires réciproques n'est qu'une appli-
cation particulière du principe de dualité. Par ce principe
fait correspondre les points et les droites ou les p.
de telle sorte que les points qui correspondent à p.
droites issues d'un même point se trouvent sur
même droite, qui correspond à ce point. D'où l'éta-
blissement de figures correspondantes — Coordonnées Tangentes
Utilité du principe de dualité en Algèbre.

Principe de homographie. principe général de transfor-
mation de toutes les autres transformations (de figures en figures
même genre) sont des cas particuliers (La majoration
ordonnée, par laquelle on transforme par ex. le cercle
en ellipse, est une méthode de généralisation, car elle
se conclut du cas particulier au cas général.)

Le principe de homographie a pour but de généraliser
les constructions, soit les propriétés des figures.

Ce principe repose sur la conservation du rapport anhar-
mique de 4 points ou de 4 droites: c'est le type unique de
relations transformables par homographie. La
correspondance entre une figure et sa transformée conserve
l'égalité des rapports anharmoniques correspondants.

3 applications particulières: figures homologues
extension des relations angulaires; géométrie des involution
— Enfin, théorie des figures homographiques, générale
de la similitude et de l'homothétie.

(1) avec le principe des relations métriques.

Chasles.

Note VII. Sur l'hommage de Jean Ceva, intitulé:
De lineis rectis se invicem secantibus, statica
constructio (in 4^{to}, Milan, 1678)

1^o Théorème de Ptolémée:

Plaçons en A, C, a

3 points matériels tels
 que le centre de gravité
 de A et C soit en b,

et que le centre de gravité de C et a soit en B.

Le centre de gravité de A, C, a sera en c. On a:

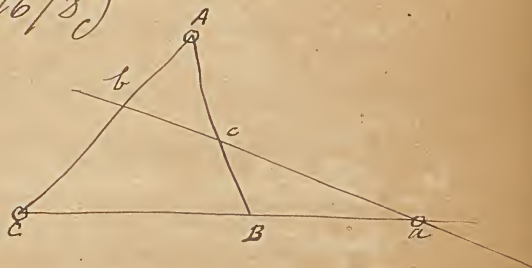
$$\frac{Ab}{Cb} = \frac{C}{A}$$

$$\frac{Ba}{Ca} = \frac{C}{C+a}$$

$$\frac{Ac}{Bc} = \frac{C+a}{A}$$

(A, C, a désignant les masses des p. correspondants.)

Donc: $Ab \cdot Bc \cdot Ca = Ac \cdot Cb \cdot Ba$



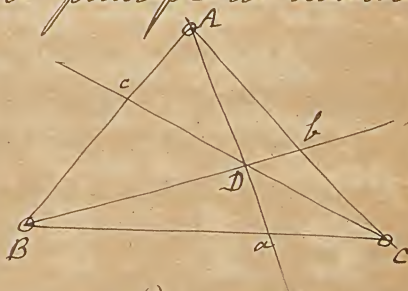
2^o Théorème correspondant (par le principe de dualité.)

Plaçons en A, B, C 3 points
 matériels tels que le centre de
 gravité de A et B soit en c,

et le centre de gravité de A et C

en b. Le centre de gravité des 3

points sera en D, et conséquemment le centre de gravité
 de B et C en a. On a donc:



$$\frac{Ba}{Ca} = \frac{C}{B}$$

$$\frac{Ac}{Bc} = \frac{B}{A}$$

$$\frac{Cb}{Ab} = \frac{A}{C}$$

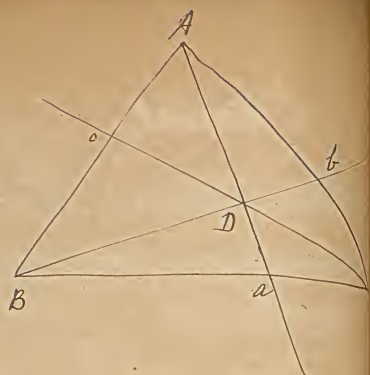
Donc: $Ab \cdot Bc \cdot Ca = Ac \cdot Cb \cdot Ba$.

(Corollaire (même figure))

$$\frac{AD}{Da} = \frac{B+C}{A} = \frac{B}{A} + \frac{C}{A}$$

Où: $\frac{B}{A} = \frac{Ac}{Bc}$ $\frac{C}{A} = \frac{Ab}{Cb}$

Donc: $\frac{AD}{Da} = \frac{Ab}{Cb} + \frac{Ac}{Bc}$

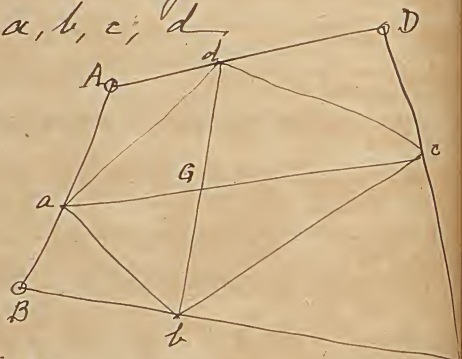


propriété générale du quadrilatère $AbDc$.

3° - Théorème relatif au quadrilatère gauche $ABCD$ coupé par un plan en a, b, c, d .

Plaçons en A, B, C, D

les points matériels tels que le centre de gravité de A et B soit en a , celui de B et C en b , celui de C et D en c .



Le centre de gravité des 4 points sera sur la droite ac . D'autre part, il sera dans le plan ADB ; donc il est à leur intersection, c-à-d. à l'intersection G de ac et de bd . Par conséquent, le centre de gravité de A et D se trouve en d . On a:

$$\frac{Aa}{Ba} = \frac{B}{A} \quad \frac{Bb}{Cb} = \frac{C}{B} \quad \frac{Cc}{Dc} = \frac{D}{C} \quad \frac{Dd}{Ad} = \frac{A}{D}$$

Donc: $Aa \cdot Bb \cdot Cc \cdot Dd = aB \cdot bC \cdot cD \cdot dA$.

Chasles. — Notes.

Note VIII. Construction des spirales. Leur analogie avec les courbes qui portent le même nom dans le système de coordonnées de Descartes.

Toute spirale (càd. toute courbe représentée par une équation en coordonnées polaires) peut être considérée comme la projection de l'intersection d'une surface hélicoïde par une certaine surface de révolution, ces deux surfaces ayant pour axe commun la perpendiculaire au plan de la spirale, menée par son origine.

Soit $z = f(x)$
l'équation en coordonnées cartésiennes de la méridienne de la surface de révolution, Oz étant l'axe de rotation, $z = f(z)$ sera l'équation de la surface de révolution.

D'autre part, Soit $z = a\omega$
l'équation de la surface hélicoïde, ω étant l'angle dont tourne la génératrice perpendiculaire à Oz . L'équation, en coordonnées polaires, de la projection de l'intersection des 2 surfaces sur un plan perpendiculaire à l'axe Oz sera:

Inversement, à la spirale: $a\omega = f(z)$
correspond la méridienne: $z = f(x)$

On peut concevoir l'intersection des 2 surfaces (dont la spirale est la projection) comme engendrée par un point M qui se déplace d'un mouvement uniforme suivant Oz sur la méridienne, pendant que celle-ci tourne d'un mouvement uniforme autour de l'axe Oz .

La spirale d'Archimède:

$$aw = r$$

correspond la courbe méridienne:

$$z = r$$

cà d. une droite; la surface de révolution est un cône.

Théorème de Pappus: La spirale d'Archimède est la projection orthogonale de l'intersection de la surface hélicoïdale par un cône de même axe.

La spirale hyperbolique:

$$rw = Cte$$

correspond l'hyperbole équilatère:

$$xz = Cte$$

tournant autour d'un de ses asymptotes.

La spirale logarithmique:

$$w = \log r$$

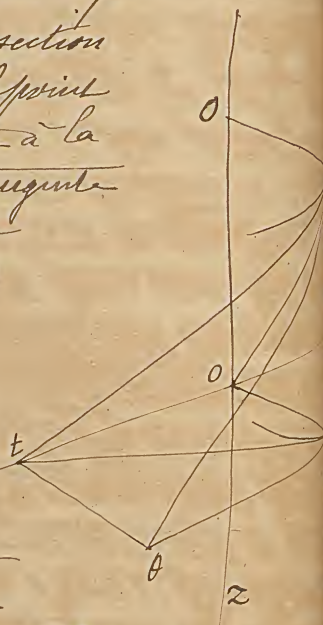
correspond la logarithmique:

$$z = a \log r$$

tournant autour de son asymptote.

— Construction de la tangente aux spirales.

Soit M le point générateur de l'intersection des 2 surfaces; m sa projection, c.à d. le point générateur de la spirale. La tangente à la spirale en m est la projection de la tangente à la courbe gauche en M . Celle-ci est l'intersection des plans tangents en M aux 2 surfaces. Or le plan tangent en M à la surface de révolution coupe le plan suivant ot (on a même le plan de projection pour le pr O où le plan tangent coupe l'axe Oz). Le plan tangent à la surface hélicoïdale est $OM\theta$: il coupe le plan de projection suivant $O\theta$ perpendiculaire à $m\theta$ et parallèle à Om . Or. Donc: $Ot = m\theta$.



Or: $m\theta = Mm \cdot \tan \alpha$ α angle de la tangente MO

Helice $z = a\omega$, $z = Cte$, avec base Oz :

$\alpha = \frac{z}{a}$ d'où: $m\theta = \frac{Mm \cdot z}{a} = Ot$.

est la sous-tangente à la spirale en m ; connaissant Ot , on peut construire la tangente mt . (car SM est \perp à la méridienne)

$Mm = 0$ est la sous-tangente à la méridienne en M . Ainsi

on peut déduire la sous-tangente de la spirale de la sous-tangente de la méridienne. Posons: $Mm = S$.

Soit On la sous-normale à la spirale: $On = \frac{z^2}{Ot}$:

donc $On = \frac{az}{S}$ $Ot = \frac{zS}{a}$.

$z = OM = om$ est l'ordonnée de la méridienne, dont l'abscisse est z .)

Pour la spirale d'Archimède, la méridienne est droite:

$\frac{z}{S} = Cte$ Donc: $On = Cte$

La sous-normale de la spirale d'Archimède est constante.

Pour la spirale hyperbolique, la méridienne est une hyperbole

équilatère, où: $Sy = Cte$ Donc: $Ot = Cte$

La sous-tangente de la spirale hyperbolique est constante.

Dans la logarithmique, $S = Cte$; donc: $\frac{Ot}{z} = \frac{S}{a} = Cte$

$\frac{Ot}{z}$ est la tang. trig. de l'angle qu'il fait la tang. à la spirale avec le rayon vecteur; donc cet angle est constant.

Dans la spirale logarithmique, la tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur.

Les pieds des tangentes sont sur une autre spirale

logarithmique semblable à la première, et par conséquent

égale à la première.

Note XII:

La division d'une droite en moyen et extrême raison se trouve, entre 2 points A & B, un 3^e point C, tel qu'on ait:

$$\overline{AC}^2 = AB \cdot CB$$

Cette relation peut être regardée comme dérivant d'une dans laquelle on a supposé qu'un point de la droite a disparu en passant à l'infini. Soit I ce point: le point cherché devra satisfaire, par rapport aux 3 points donnés A, B, & l'équation:

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BI}^2 = AB \cdot AI \cdot CB \cdot CI$$

qui est symétrique par rapport aux 4 points A, B, C, & I, sorte que, quel que soit le point qu'on envoie à l'infini, l'équation résultante exprime toujours la division d'une droite en moyen et extrême raison.

Chasles.

Note IX: Sur la fonction anharmonique
de quatre points ou de quatre droites.

Théorème de Pappus: Quand quatre droites sont issues du
même point, toute transversale les rencontre en quatre points
dont le rapport anharmonique a toujours la même valeur.
Fonction anharmonique de 4 points en ligne droite:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

Théorème fondamental: Si d'un point quelconque ou même
des droites aboutissant à 4 points situés en ligne droite,
la fonction anharmonique de ces 4 points aura la
même valeur que le rapport anharmonique des 4 droites,
càd la fonction obtenue en substituant, dans le rapport
anharmonique des 4 points, aux segments qui y entrent,
les sinus des angles que font entre elles les droites correspondant
à ces points.

La fonction anharmonique de 4 points a donc la
propriété projective, càd. se conserve par projection.

- 3 formes du rapport anharmonique de 4 points:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}, \quad \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db}, \quad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}$$

Si le point d est à l'infini:

$$\frac{ac}{cb}, \quad \frac{ca}{ab}, \quad \frac{ba}{bc}$$

Si l'un des rapports anharmoniques de 4 points est égal
au rapport anharmonique de même forme de 4 autres points,
les rapports anharmoniques des 2 autres formes seront
aussi égaux entre eux.

Relations exprimant l'égalité de 2 fonctions anharmoniques

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + \frac{a'b'}{ad'} : \frac{c'b'}{cd'} = 1 \quad \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} + \frac{ad'}{a'b'} : \frac{cd'}{c'b'} = 1 \quad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} + \frac{a'b'}{ad'} : \frac{c'b'}{cd'} = 1$$

En effet, si l'on égale les rapports anharmoniques de même sens :

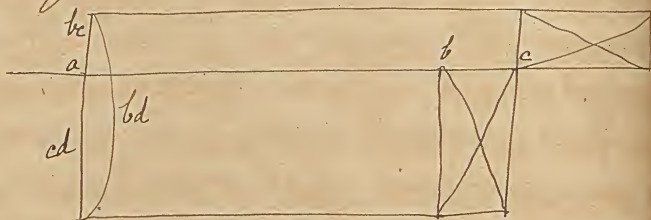
$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = 1 \quad \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} + \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = 1 \quad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} + \frac{ac}{ad} : \frac{cb}{cd} = 1$$

$$\text{cà d: } ac \cdot bd - ab \cdot cd = ad \cdot bc$$

$$ac \cdot bd - ad \cdot bc = ab \cdot cd$$

$$ab \cdot cd - ac \cdot bd = -ad \cdot bc$$

La relation identique entre 3 points en ligne droite, qu'on a démontrée géométriquement comme suit :



Elle se démontre aussi aisément par l'algèbre.

Autre démonstration des relations entre rapports anharmoniques

Projection envoyant d à l'infini :

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \quad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\beta}$$

La 1^{re} équation devient :

$$\beta\alpha + \alpha\gamma = \beta\gamma$$

relation identique entre 3 points en ligne droite (M^{or})

Théorème de Poncelet : Quand 3 droites issues d'un même point rencontrent un cercle, la 1^{re} en a, a', la 2^e en b, b', la 3^e en c, c' ; on a la relation :

$$\frac{\sin \frac{ca}{2}}{\sin \frac{cb}{2}} : \frac{\sin \frac{da}{2}}{\sin \frac{db}{2}} = \frac{\sin \frac{ca'}{2}}{\sin \frac{cb'}{2}} : \frac{\sin \frac{da'}{2}}{\sin \frac{db'}{2}}$$

Dans l'espace: Etant donné le plan passant par une même droite, le rapport anharmonique est des 4 points où une transversale le rencontre est égal au rapp. anharmonique des sinus des 4 angles dièdres correspondant aux 4 segments de la transversale, qu'on appelle fonction anharmonique du plan.

2^e. Quand 4 droites s'appuient chacune sur 3 droites fixes de l'espace, le rapport anharmonique des segments qu'elles forment sur l'une de ces 3 droites est égal à celui des segments qu'elles forment sur chacune des 2 autres.

- Pour le démontrer, il suffit de considérer 2 des 3 droites fixes comme des transversales par rapport aux 4 plans déterminés par la 3^e et chacune des 4 droites mobiles.

Réciproque: Si 4 droites s'appuient sur 2 droites fixes de l'espace, de manière que les rapports anharmoniques des segments qu'elles font sur ces 2 droites soient égaux, toute droite qui s'appuiera sur 3 de ces droites s'appuiera nécessairement sur la quatrième.

Corollaire: Quand une droite mobile s'appuie sur 3 droites fixes, toute droite qui s'appuie sur 3 positions de la dr. mobile s'appuie sur toutes les autres positions de cette droite.

Double génération du hyperboloïde à une nappe:

1^o La surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur 3 droites fixes, peut être engendrée, d'une seconde manière, par une droite mobile qui s'appuie sur 3 positions de la 1^{re} génératrice. — 2^o Cette surface est telle que tout plan la coupe suivant une conique.

La 1^{re} partie résulte immédiatement du corollaire précédent.

Pour démontrer la 2^e partie, considérons les 4 droites A, B, C, D s'appuyant sur les 2 droites I, I' : menons un plan quelconque qui coupe ces 4 droites en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$: on démontre que ces 8 points sont sur une conique : cela, il suffit de prouver que les 2 faisceaux $\lambda(\alpha\beta\gamma\delta)$ et $\lambda'(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$ ont même rapport anharmonique. Or le rapport anharmonique des 4 droites $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta$ est le même que celui des 4 plans $I.A, I.B, I.C, I.D$, c.à.d. que celui des 4 points a, b, c, d sur la droite I (considérée comme transversale) rencontrant les 4 droites A, B, C, D . De même, le rapport anharmonique des 4 dr. $\lambda'\alpha', \lambda'\beta', \lambda'\gamma', \lambda'\delta'$ est le même que celui des 4 plans $I'.A, I'.B, I'.C, I'.D$, c.à.d. que celui des 4 points a', b', c', d' sur la droite I' rencontrant les 4 dr. A, B, C, D . Or les rapports anharmoniques des 4 points a, b, c, d et des 4 pts a', b', c', d' sont égaux, donc les rapports anharmoniques des 4 dr. $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta$ et des 4 dr. $\lambda'\alpha', \lambda'\beta', \lambda'\gamma', \lambda'\delta'$ sont aussi égaux, c. q. f. d.

Corollaire Les droites menées par un point de l'axe d'un hyperboloïde à une nappes parallèlement aux génératrices de ce système de droites forment un cône du second degré.

On prouve ce th. en montrant, comme ci-dessus, que toute section plane du cône est une conique.

Corollaire Quatre génératrices du même système d'un hyperboloïde à une nappe sont, sur une génératrice quelconque du autre système, quatre segments dont le rapp. anharmonique a une valeur constante.

Corollaire Si l'on a un quadrilatère gauche $a b b' a'$ que l'on divise ses côtés opposés $ab, a'b'$ de telle sorte qu'on ait

$$\frac{ca}{cb} = \frac{c'a'}{c'b'} \times \text{Const.}$$

la droite cc' engendre un hyperboloïde à une nappe (cf. mêm. sur le principe de dualité, page 8.)

Chasles.

Note X: Théorie de l'involution de six points. (se partie)

Six points en ligne droite, A, A', B, B', C, C' se correspondant 2 à 2, sont dits en involution quand on a:

$$\frac{CA \cdot CA'}{CB \cdot CB'} = \frac{C'A \cdot C'A'}{C'B \cdot C'B'}$$

On a en même temps:

$$\frac{BA \cdot BA'}{BC \cdot BC'} = \frac{B'A \cdot B'A'}{B'C \cdot B'C'} \quad \frac{AB \cdot AB'}{AC \cdot AC'} = \frac{A'B \cdot A'B'}{A'C \cdot A'C'}$$

On a aussi les quatre relations entre 6 segments:

$$B \left\{ \begin{array}{l} AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot CB' \cdot BA' \\ AB' \cdot BC \cdot C'A' = AC \cdot C'B' \cdot BA' \\ AB \cdot B'C' \cdot CA' = AC' \cdot CB \cdot B'A' \\ AB \cdot B'C \cdot C'A' = AC \cdot C'B \cdot B'A' \end{array} \right. B$$

De chacune des 7 relations on peut déduire les 6 autres.

Si 2 points conjugués D, D' forment une involution avec les 2 points A, A', B, B' :

$$\frac{AB \cdot AB'}{AD \cdot AD'} = \frac{A'B \cdot A'B'}{A'D \cdot A'D'}$$

ils forment une involution avec 2 quelconques des 3 prem. couples:

par ex.
$$\frac{AC \cdot AC'}{AD \cdot AD'} = \frac{A'C \cdot A'C'}{A'D \cdot A'D'}$$

Si l'on a sur une ligne droite plusieurs couples de points conjugués formant une involution avec 2 premiers couples, 3 couples quelconques sont en involution.

Si sur une ligne droite 7 couples de points forment, pris 3 à 3, une involution, 4 points pris chacun dans un couple ont le même rapport anharmonique que les 4 autres points.

Involution de 6 points (Desargues)

Si 2 points conjugués C, C' se confondent en un seul point, on a les 4 relations:

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AE^2}{A'E^2}$$

$$\frac{BA \cdot BA'}{B'A \cdot B'A'} = \frac{BE^2}{B'E^2}$$

$$\frac{EA \cdot EB}{EA' \cdot EB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\frac{EA \cdot EB'}{EA' \cdot EB} = \frac{AB'}{A'B}$$

— Si C' est à l'infini, son conjugué C devient point central O : les 7 relations deviennent:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB', \quad \frac{BA \cdot BA'}{B'A \cdot B'A'} = \frac{BO}{B'O}, \quad \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AO}{A'O}$$

$$\frac{AB'}{A'B} = \frac{OB'}{OA'}, \quad \frac{AB'}{A'B} = \frac{OA}{OB}, \quad \frac{AB}{A'B} = \frac{OB}{OA'}, \quad \frac{AB}{A'B} = \frac{OA}{OB'}$$

Quand 3 couples de points forment une involution, il y a toujours un point tel, que le produit de ses distances à 2 points de chaque couple est constant.

Réciproque: Si l'on prend sur une droite 2 points A, A' le produit de leurs distances à un p. fixe O de cette droite est égal à une quantité constante, 3 couples de points forment une involution.

Dans toute involution de 6 points, il y a un point central et 2 points doubles E, F , déterminés par la condition

$$(1) \quad OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = OE^2$$

Ils sont réels si les points conjugués sont du même côté par rapport à O ; sin au contraire, ils sont de côtés opposés. Soient E, F les 2 points doubles réels: on a

$$OE^2 = OF^2 = OA \cdot OA'$$

E et F sont conjugués harmoniques par rapport à A, A'

(1) Il s'ensuit que 3 couples de points conjugués harmoniques par rapport à fixes E, F , forment une involution

$$OE^2 = OF^2 = OB \cdot OB'$$

E et F sont ~~donc~~ ^{aussi} conjugués harmoniques par rapport à B, B' .
Les points doubles sont donc conjugués harmoniques par rapport à un couple quelconque de l'involution.

Chacun des rapports: $\frac{EA \cdot EA'}{EB \cdot EB'}$, $\frac{FA \cdot FA'}{FB \cdot FB'}$

est un maximum ou un minimum si l'on remplace le point double E ou F par un point quelconque M de la droite (Apollonius).
Étant donnés 2 couples de points A, A' et B, B' , et leur point central O , un point quelconque M de la droite joint de la propriété suivante (Pappus):

$$MA \cdot MA' - MB \cdot MB' = (AB + A'B') MO.$$

Théorème de Pappus (VII, 130):

Une transversale quelconque coupe les côtés et les diagonales d'un quadrilatère en 6 points qui sont en involution.
(équations B) (Les équations A sont dues à Desargues.)

Théorème de Desargues:

Un quadrilatère étant inscrit à une conique, les 6 points où une transversale quelconque rencontre la conique et les 6 côtés du quadrilatère sont en involution. (Sturm)

Théorèmes analogues, qu'on déduit du précédent:

Quand 2 coniques sont circonscrites à un quadrilatère, une transversale quelconque rencontre ces coniques en 6 points, ces 2 côtés opposés du quadrilatère en 2 autres points, ces 6 points sont en involution.

Quand 3 coniques sont circonscrites au même quadrilatère, une transversale quelconque les coupe en 6 points qui sont en involution.

Propositions inverses (en vertu du principe de dualité)

Les droites menées d'un même point par 6 points en involution forment un faisceau en involution, et que les mêmes relations qui existent entre les segments de la transversale ont lieu entre les sinus des angles correspondants.

- En effet, la relation d'involution se réduisant à celle de 2 rapports anharmoniques, et les rapports anharmoniques ayant les mêmes valeurs pour les sinus des angles des ^{segments} que pour les ~~points~~, les relations d'involution se conservent quand on passe des points aux droites, - et réciproquement.

Un faisceau en involution détermine une involution sur une transversale qui coupe 6 points en involution.

Les 6 tangentes menées d'un même point ~~aux~~ à 3 cercles inscrits dans un même quadrilatère forment un faisceau en involution (Th. inverse du dernier de la page précédente).

Si les 3 cercles se réduisent aux 3 diagonales d'un quadrilatère complet, on a comme cas particulier

Corollaire. Les six droites menées d'un même point aux 6 sommets d'un quadrilatère complet forment un faisceau en involution (Th. inverse de celui de la page précédente). Toute transversale rencontrera ces droites en 6 points qui sont en involution.

2^e partie

Quand 3 droites, issues d'un même point, rencontrent 3 cercles circonscrits, la 1^{re} en a, a' , la 2^e en b, b' , la 3^e en c, c' , on a la relation d'involution (analogue aux relations

$$\frac{\sin \frac{ca}{2} \cdot \sin \frac{ca'}{2}}{\sin \frac{cb}{2} \cdot \sin \frac{cb'}{2}} = \frac{\sin \frac{ca}{2} \cdot \sin \frac{ca'}{2}}{\sin \frac{cb}{2} \cdot \sin \frac{cb'}{2}}$$

On aura entre les sinus toutes les relations (A) (B) (C) (D) (E) (F) (G) (H) (I) (J) (K) (L) (M) (N) (O) (P) (Q) (R) (S) (T) (U) (V) (W) (X) (Y) (Z) (AA) (AB) (AC) (AD) (AE) (AF) (AG) (AH) (AI) (AJ) (AK) (AL) (AM) (AN) (AO) (AP) (AQ) (AR) (AS) (AT) (AU) (AV) (AW) (AX) (AY) (AZ) (BA) (BB) (BC) (BD) (BE) (BF) (BG) (BH) (BI) (BJ) (BK) (BL) (BM) (BN) (BO) (BP) (BQ) (BR) (BS) (BT) (BU) (BV) (BW) (BX) (BY) (BZ) (CA) (CB) (CC) (CD) (CE) (CF) (CG) (CH) (CI) (CJ) (CK) (CL) (CM) (CN) (CO) (CP) (CQ) (CR) (CS) (CT) (CU) (CV) (CW) (CX) (CY) (CZ) (DA) (DB) (DC) (DD) (DE) (DF) (DG) (DH) (DI) (DJ) (DK) (DL) (DM) (DN) (DO) (DP) (DQ) (DR) (DS) (DT) (DU) (DV) (DW) (DX) (DY) (DZ) (EA) (EB) (EC) (ED) (EE) (EF) (EG) (EH) (EI) (EJ) (EK) (EL) (EM) (EN) (EO) (EP) (EQ) (ER) (ES) (ET) (EU) (EV) (EW) (EX) (EY) (EZ) (FA) (FB) (FC) (FD) (FE) (FF) (FG) (FH) (FI) (FJ) (FK) (FL) (FM) (FN) (FO) (FP) (FQ) (FR) (FS) (FT) (FU) (FV) (FW) (FX) (FY) (FZ) (GA) (GB) (GC) (GD) (GE) (GF) (GG) (GH) (GI) (GJ) (GK) (GL) (GM) (GN) (GO) (GP) (GQ) (GR) (GS) (GT) (GU) (GV) (GW) (GX) (GY) (GZ) (HA) (HB) (HC) (HD) (HE) (HF) (HG) (HH) (HI) (HJ) (HK) (HL) (HM) (HN) (HO) (HP) (HQ) (HR) (HS) (HT) (HU) (HV) (HW) (HX) (HY) (HZ) (IA) (IB) (IC) (ID) (IE) (IF) (IG) (IH) (II) (IJ) (IK) (IL) (IM) (IN) (IO) (IP) (IQ) (IR) (IS) (IT) (IU) (IV) (IW) (IX) (IY) (IZ) (JA) (JB) (JC) (JD) (JE) (JF) (JG) (JH) (JI) (JJ) (JK) (JL) (JM) (JN) (JO) (JP) (JQ) (JR) (JS) (JT) (JU) (JV) (JW) (JX) (JY) (JZ) (KA) (KB) (KC) (KD) (KE) (KF) (KG) (KH) (KI) (KJ) (KK) (KL) (KM) (KN) (KO) (KP) (KQ) (KR) (KS) (KT) (KU) (KV) (KW) (KX) (KY) (KZ) (LA) (LB) (LC) (LD) (LE) (LF) (LG) (LH) (LI) (LJ) (LK) (LL) (LM) (LN) (LO) (LP) (LQ) (LR) (LS) (LT) (LU) (LV) (LW) (LX) (LY) (LZ) (MA) (MB) (MC) (MD) (ME) (MF) (MG) (MH) (MI) (MJ) (MK) (ML) (MM) (MN) (MO) (MP) (MQ) (MR) (MS) (MT) (MU) (MV) (MW) (MX) (MY) (MZ) (NA) (NB) (NC) (ND) (NE) (NF) (NG) (NH) (NI) (NJ) (NK) (NL) (NM) (NN) (NO) (NP) (NQ) (NR) (NS) (NT) (NU) (NV) (NW) (NX) (NY) (NZ) (OA) (OB) (OC) (OD) (OE) (OF) (OG) (OH) (OI) (OJ) (OK) (OL) (OM) (ON) (OO) (OP) (OQ) (OR) (OS) (OT) (OU) (OV) (OW) (OX) (OY) (OZ) (PA) (PB) (PC) (PD) (PE) (PF) (PG) (PH) (PI) (PJ) (PK) (PL) (PM) (PN) (PO) (PP) (PQ) (PR) (PS) (PT) (PU) (PV) (PW) (PX) (PY) (PZ) (QA) (QB) (QC) (QD) (QE) (QF) (QG) (QH) (QI) (QJ) (QK) (QL) (QM) (QN) (QO) (QP) (QQ) (QR) (QS) (QT) (QU) (QV) (QW) (QX) (QY) (QZ) (RA) (RB) (RC) (RD) (RE) (RF) (RG) (RH) (RI) (RJ) (RK) (RL) (RM) (RN) (RO) (RP) (RQ) (RR) (RS) (RT) (RU) (RV) (RW) (RX) (RY) (RZ) (SA) (SB) (SC) (SD) (SE) (SF) (SG) (SH) (SI) (SJ) (SK) (SL) (SM) (SN) (SO) (SP) (SQ) (SR) (SS) (ST) (SU) (SV) (SW) (SX) (SY) (SZ) (TA) (TB) (TC) (TD) (TE) (TF) (TG) (TH) (TI) (TJ) (TK) (TL) (TM) (TN) (TO) (TP) (TQ) (TR) (TS) (TT) (TU) (TV) (TW) (TX) (TY) (TZ) (UA) (UB) (UC) (UD) (UE) (UF) (UG) (UH) (UI) (UJ) (UK) (UL) (UM) (UN) (UO) (UP) (UQ) (UR) (US) (UT) (UU) (UV) (UW) (UX) (UY) (UZ) (VA) (VB) (VC) (VD) (VE) (VF) (VG) (VH) (VI) (VJ) (VK) (VL) (VM) (VN) (VO) (VP) (VQ) (VR) (VS) (VT) (VU) (VV) (VW) (VX) (VY) (VZ) (WA) (WB) (WC) (WD) (WE) (WF) (WG) (WH) (WI) (WJ) (WK) (WL) (WM) (WN) (WO) (WP) (WQ) (WR) (WS) (WT) (WU) (WV) (WW) (WX) (WY) (WZ) (XA) (XB) (XC) (XD) (XE) (XF) (XG) (XH) (XI) (XJ) (XK) (XL) (XM) (XN) (XO) (XP) (XQ) (XR) (XS) (XT) (XU) (XV) (XW) (XX) (XY) (XZ) (YA) (YB) (YC) (YD) (YE) (YF) (YG) (YH) (YI) (YJ) (YK) (YL) (YM) (YN) (YO) (YP) (YQ) (YR) (YS) (YT) (YU) (YV) (YW) (YX) (YY) (YZ) (ZA) (ZB) (ZC) (ZD) (ZE) (ZF) (ZG) (ZH) (ZI) (ZJ) (ZK) (ZL) (ZM) (ZN) (ZO) (ZP) (ZQ) (ZR) (ZS) (ZT) (ZU) (ZV) (ZW) (ZX) (ZY) (ZZ) (AA) (AB) (AC) (AD) (AE) (AF) (AG) (AH) (AI) (AJ) (AK) (AL) (AM) (AN) (AO) (AP) (AQ) (AR) (AS) (AT) (AU) (AV) (AW) (AX) (AY) (AZ) (BA) (BB) (BC) (BD) (BE) (BF) (BG) (BH) (BI) (BJ) (BK) (BL) (BM) (BN) (BO) (BP) (BQ) (BR) (BS) (BT) (BU) (BV) (BW) (BX) (BY) (BZ) (CA) (CB) (CC) (CD) (CE) (CF) (CG) (CH) (CI) (CJ) (CK) (CL) (CM) (CN) (CO) (CP) (CQ) (CR) (CS) (CT) (CU) (CV) (CW) (CX) (CY) (CZ) (DA) (DB) (DC) (DD) (DE) (DF) (DG) (DH) (DI) (DJ) (DK) (DL) (DM) (DN) (DO) (DP) (DQ) (DR) (DS) (DT) (DU) (DV) (DW) (DX) (DY) (DZ) (EA) (EB) (EC) (ED) (EE) (EF) (EG) (EH) (EI) (EJ) (EK) (EL) (EM) (EN) (EO) (EP) (EQ) (ER) (ES) (ET) (EU) (EV) (EW) (EX) (EY) (EZ) (FA) (FB) (FC) (FD) (FE) (FF) (FG) (FH) (FI) (FJ) (FK) (FL) (FM) (FN) (FO) (FP) (FQ) (FR) (FS) (FT) (FU) (FV) (FW) (FX) (FY) (FZ) (GA) (GB) (GC) (GD) (GE) (GF) (GG) (GH) (GI) (GJ) (GK) (GL) (GM) (GN) (GO) (GP) (GQ) (GR) (GS) (GT) (GU) (GV) (GW) (GX) (GY) (GZ) (HA) (HB) (HC) (HD) (HE) (HF) (HG) (HH) (HI) (HJ) (HK) (HL) (HM) (HN) (HO) (HP) (HQ) (HR) (HS) (HT) (HU) (HV) (HW) (HX) (HY) (HZ) (IA) (IB) (IC) (ID) (IE) (IF) (IG) (IH) (II) (IJ) (IK) (IL) (IM) (IN) (IO) (IP) (IQ) (IR) (IS) (IT) (IU) (IV) (IW) (IX) (IY) (IZ) (JA) (JB) (JC) (JD) (JE) (JF) (JG) (JH) (JI) (JJ) (JK) (JL) (JM) (JN) (JO) (JP) (JQ) (JR) (JS) (JT) (JU) (JV) (JW) (JX) (JY) (JZ) (KA) (KB) (KC) (KD) (KE) (KF) (KG) (KH) (KI) (KJ) (KK) (KL) (KM) (KN) (KO) (KP) (KQ) (KR) (KS) (KT) (KU) (KV) (KW) (KX) (KY) (KZ) (LA) (LB) (LC) (LD) (LE) (LF) (LG) (LH) (LI) (LJ) (LK) (LM) (LN) (LO) (LP) (LQ) (LR) (LS) (LT) (LU) (LV) (LW) (LX) (LY) (LZ) (MA) (MB) (MC) (MD) (ME) (MF) (MG) (MH) (MI) (MJ) (MK) (ML) (MM) (MN) (MO) (MP) (MQ) (MR) (MS) (MT) (MU) (MV) (MW) (MX) (MY) (MZ) (NA) (NB) (NC) (ND) (NE) (NF) (NG) (NH) (NI) (NJ) (NK) (NL) (NM) (NN) (NO) (NP) (NQ) (NR) (NS) (NT) (NU) (NV) (NW) (NX) (NY) (NZ) (OA) (OB) (OC) (OD) (OE) (OF) (OG) (OH) (OI) (OJ) (OK) (OL) (OM) (ON) (OO) (OP) (OQ) (OR) (OS) (OT) (OU) (OV) (OW) (OX) (OY) (OZ) (PA) (PB) (PC) (PD) (PE) (PF) (PG) (PH) (PI) (PJ) (PK) (PL) (PM) (PN) (PO) (PP) (PQ) (PR) (PS) (PT) (PU) (PV) (PW) (PX) (PY) (PZ) (QA) (QB) (QC) (QD) (QE) (QF) (QG) (QH) (QI) (QJ) (QK) (QL) (QM) (QN) (QO) (QP) (QQ) (QR) (QS) (QT) (QU) (QV) (QW) (QX) (QY) (QZ) (RA) (RB) (RC) (RD) (RE) (RF) (RG) (RH) (RI) (RJ) (RK) (RL) (RM) (RN) (RO) (RP) (RQ) (RR) (RS) (RT) (RU) (RV) (RW) (RX) (RY) (RZ) (SA) (SB) (SC) (SD) (SE) (SF) (SG) (SH) (SI) (SJ) (SK) (SL) (SM) (SN) (SO) (SP) (SQ) (SR) (SS) (ST) (SU) (SV) (SW) (SX) (SY) (SZ) (TA) (TB) (TC) (TD) (TE) (TF) (TG) (TH) (TI) (TJ) (TK) (TL) (TM) (TN) (TO) (TP) (TQ) (TR) (TS) (TT) (TU) (TV) (TW) (TX) (TY) (TZ) (UA) (UB) (UC) (UD) (UE) (UF) (UG) (UH) (UI) (UJ) (UK) (UL) (UM) (UN) (UO) (UP) (UQ) (UR) (US) (UT) (UU) (UV) (UW) (UX) (UY) (UZ) (VA) (VB) (VC) (VD) (VE) (VF) (VG) (VH) (VI) (VJ) (VK) (VL) (VM) (VN) (VO) (VP) (VQ) (VR) (VS) (VT) (VU) (VV) (VW) (VX) (VY) (VZ) (WA) (WB) (WC) (WD) (WE) (WF) (WG) (WH) (WI) (WJ) (WK) (WL) (WM) (WN) (WO) (WP) (WQ) (WR) (WS) (WT) (WU) (WV) (WW) (WX) (WY) (WZ) (XA) (XB) (XC) (XD) (XE) (XF) (XG) (XH) (XI) (XJ) (XK) (XL) (XM) (XN) (XO) (XP) (XQ) (XR) (XS) (XT) (XU) (XV) (XW) (XX) (XY) (XZ) (YA) (YB) (YC) (YD) (YE) (YF) (YG) (YH) (YI) (YJ) (YK) (YL) (YM) (YN) (YO) (YP) (YQ) (YR) (YS) (YT) (YU) (YV) (YW) (YX) (YY) (YZ) (ZA) (ZB) (ZC) (ZD) (ZE) (ZF) (ZG) (ZH) (ZI) (ZJ) (ZK) (ZL) (ZM) (ZN) (ZO) (ZP) (ZQ) (ZR) (ZS) (ZT) (ZU) (ZV) (ZW) (ZX) (ZY) (ZZ)

Charles.

27

Note X. Sur l'involution de six points: 1^{re} partie.

Six points, conjugués deux à deux, sont en involution lorsque le rapport anharmonique de quatre d'entre eux est égal à celui de leurs conjugués.

Le rapp. anharmonique (A, B, C, C') est égal au rapp. anharmon. (A', B', C', C) si l'on a une des 3 relations:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{C'A}{C'B} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{CA'}{CB'} \quad \text{ou:} \quad \frac{CA \cdot CA'}{CB \cdot CB'} = \frac{C'A \cdot C'A'}{C'B \cdot C'B'}$$

$$\frac{CA}{CC'} : \frac{BA}{BC'} = \frac{C'A'}{C'C} : \frac{B'A'}{B'C} \quad \text{ou:} \quad CA \cdot A'B' \cdot BC' = C'A' \cdot AB \cdot B'C$$

$$\frac{CB}{CC'} : \frac{AB}{AC'} = \frac{C'B'}{C'C} : \frac{A'B'}{A'C} \quad \text{ou:} \quad CB \cdot B'A' \cdot AC' = C'B' \cdot BA \cdot A'C$$

(A) et (B)
On en déduit les 7 relations d'involution (v. 1^{re} partie)

Lorsque 6 points sont en involution, le rapport anharmonique de 4 quelconques d'entre eux est égal à celui de leurs conjugués. (donc 3 appartenant aux 3 couples)
La relation d'involution peut s'exprimer de 12 manières par une équation à 3 termes. Le 1^{er}, contenant AA' , 4 autres BB' , 4 autres CC' : exemple:

$$\frac{AB \cdot AC}{AA' \cdot BC} + \frac{AB' \cdot A'C'}{AA' \cdot B'C'} = 1 \quad (C)$$

Chacune des 12 équations entraîne les 11 autres.

On a 8 autres équations à 3 termes, de la forme:

$$\frac{AC \cdot AC'}{AB \cdot AB'} + \frac{BC \cdot BC'}{BA \cdot BA'} = 1 \quad (D)$$

Toutes ces équations (les 12 et les 8) contiennent 7 segments différents chacune

Sient α, β, γ les milieux des segments AA', BB' , situés dans l'ordre α, β, γ ; on a la relation:

$$(E) \quad \alpha A^2 \cdot \beta \gamma - \beta B^2 \cdot \alpha \gamma + \gamma C^2 \cdot \alpha \beta = \alpha \beta \cdot \beta \gamma \cdot \gamma \alpha$$

unique en son genre

Si C et C' se confondent en E , la relation devient

$$\alpha A^2 \cdot \beta E - \beta B^2 \cdot \alpha E = \alpha \beta \cdot \beta E \cdot \alpha E.$$

Si de plus B et B' se confondent en F , elle devient

$$\alpha A^2 = \alpha E \cdot \alpha F$$

ce qui signifie que A, A' sont conjugués harmoniques rapport à E, F .

Soit M un point arbitraire de la droite: on a la

$$(F) \quad MA \cdot MA' \cdot \beta \gamma - MB \cdot MB' \cdot \alpha \gamma + MC \cdot MC' \cdot \alpha \beta = 0$$

Démonstration. Si la relation a lieu pour un point de la droite, elle a lieu pour tout point M de la droite.

Or elle a lieu pour le point central O de l'involution car, comme: $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC'$

elle se réduit à: $\beta \gamma - \alpha \gamma + \alpha \beta = 0$

Remarque: $\beta \gamma = \frac{BC + B'C'}{2}$, $\alpha \gamma = \frac{AC + A'C'}{2}$, $\alpha \beta = \frac{AB}{2}$

- Dans le cas où C et C' se confondent en E , B et B' se confondent en F , on a:

$$MA \cdot MA' \cdot EF - MF^2 \cdot \alpha E + ME^2 \cdot \alpha F = 0$$

relation entre les points conjugués harmoniques, A, A' , et un point quelconque M de leur direction.

L'équation (F) est la formule la plus générale de la relation d'involution; car on en peut déduire toutes les autres en identifiant le point M à A, B, C , etc.

On en déduit la relation (E) en retranchant l'équation de l'équation générale de Stewart entre les points

(1) car on a entre les p. quelconques d'une dr. l'éq: $ma \cdot \beta \gamma + mb \cdot \gamma \alpha + mc \cdot \alpha \beta =$

$$m\alpha^2.\beta\gamma - m\beta^2.\alpha\gamma + m\gamma^2.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha.$$

Remarquant que: $m\alpha^2 - \alpha A^2 = (m\alpha + \alpha A)(m\alpha - \alpha A) = m A . m A'$.
On déduit la propriété du point central (Pappus) Soit α à l'infini; C devient le point central O ; on a:

$$m A . m A' - m B . m B' . \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} + m C . \alpha\beta . \frac{m C'}{\beta\gamma} = 0$$

$$\text{Or: } \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = 1, \quad \frac{m C'}{\beta\gamma} = 2 \frac{m C'}{\beta C + \beta C'} = \frac{2}{\frac{\beta C}{m C} + \frac{\beta C'}{m C'}} = 2; \quad \text{donc:}$$

$$m A . m A' - m B . m B' + 2 \alpha\beta . m O = 0 \quad (\text{cf. p. 25, n. I.})$$

Si B, B' se confondent en E (point double) l'éq. devient:

$$m A . m A' - m E^2 + 2 \alpha E . m O = 0. \quad (H)$$

Si A, A' se confondent en F (2^e point double) il vient:

$$m F^2 - m E^2 + 2 F E . m O = 0$$

Relation entre 3 points m, E, F , et le point O de E et F .

Démonstration du théorème d'Apollonius: d'après l'éq. (D).

$\frac{AC.AC'}{AB.AB'}$ (A variable) sera un max ou un min. Suivant que $BA.BA'$ sera un min, ou un max. Or, en vertu de (H):

$$BA.BA' = BE^2 - 2 \alpha E . BO$$

sera max, ou min, pour $\alpha E = 0$ (A et A' confondus en E .)

Relation d'involution avec 2 points arbitraires m, n
Soient α, β, γ les conjugués harmoniques de n par rapport à A, A' , à B, B' , à C, C' :

$$\frac{m A . m A'}{n A . n A'} . n \alpha . \beta \gamma + \frac{m B . m B'}{n B . n B'} . n \beta . \gamma \alpha + \frac{m C . m C'}{n C . n C'} . n \gamma . \alpha \beta = 0$$

Si n est à l'infini, on retrouve la relation (F.)

m est le point central, $m A . m A' = m B . m B' = m C . m C'$: alors:

$$\frac{n \alpha . \beta \gamma}{n A . n A'} + \frac{n \beta . \gamma \alpha}{n B . n B'} + \frac{n \gamma . \alpha \beta}{n C . n C'} = 0. \quad \left(\begin{array}{l} \text{Relation d'involution} \\ \text{avec un 3^e point arbitraire.} \end{array} \right)$$

Relations géométriques de involution :

Trois couples de diamètres conjugués d'une conique forment un faisceau en involution.

Quand 3 cordes d'une conique passent par un point, les droites menées d'un p. quelc. de la courbe leurs extrémités sont en involution.

Quand 3 angles circonscrits à une conique ont leurs sommets en ligne droite, leurs côtés rencontrent la tangente quelc. à la conique en 6 points qui sont en involution (prop. inverse de la précédente.)

— Par un p. quelc. du plan d'une conique on peut mener deux droites rectangulaires telles que le pôle de l'une (par rapport à la conique) soit sur l'autre :

Six droites ainsi menées, par 3 points arbitraires rencontrent chacun des 2 axes principaux de la courbe en 6 points qui sont en involution.

Le point central de l'involutions est le centre de la courbe et les points doubles de l'involutions sur chaque axe les foyers (réels ou imaginaires) de la courbe. Dans toute conique a 2 foyers, 2 réels et 2 imaginaires. (Pour un p. de la cb, les 2 dr. conjuguées sont la tangente et la normale.)

— Quand 3 surfaces courbes quelc. ayant un point de contact commun, s'y coupent 2 à 2, si bon même en 3 p. les 6 branches de chacune des 3 courbes d'intersection, en 6 p. sont en involution.

Quand, par une génération d'une surface réglée, on mène deux quelc. chacun d'eux est tangent en un p. et normal en un p. les 6 points sont en involution.

Chasles.

Note XV: Sur la propriété anharmonique des points d'une conique.

Théorème de Desargues sur l'involution de six points:

Quadrilatère inscrit à une conique; joignons 2 sommets opposés aux points où la transversale rencontre la conique; on a en ces 2 sommets 2 faisceaux de 4 droites. La relation d'involution entre les 6 points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$

exprime que le rapport anharmonique

des 4 points $(\alpha, \beta, \varepsilon, \zeta)$ où

l'un des faisceaux coupe

la transversale est égal

au rapport anharmonique

des 4 points conjugués

$(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ où l'autre faisceau

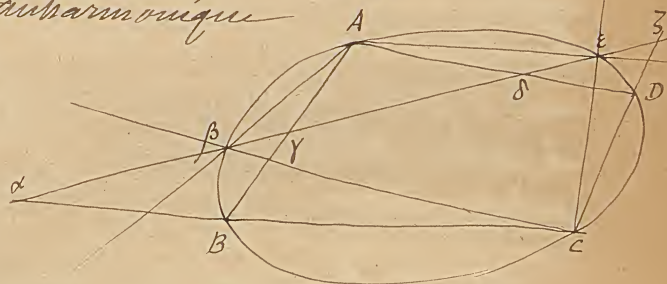
rencontre la transversale; c'est-à-dire que 2 faisceaux ont même

rapport anharmonique.

Des $\frac{\beta\alpha \cdot \beta\delta}{\beta\gamma \cdot \beta\zeta} = \frac{\varepsilon\alpha \cdot \varepsilon\delta}{\varepsilon\gamma \cdot \varepsilon\zeta}$ on tire: $\frac{\beta\alpha}{\beta\gamma} : \frac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon\gamma} = \frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon\zeta} : \frac{\beta\delta}{\beta\zeta}$

Réciproque. Quand on a 2 faisceaux de 4 droites ayant même rapport anharmonique, les 4 points de rencontre des droites correspondantes sont sur une conique qui passe par les centres des 2 faisceaux.

Démonstration: La relation anharmonique étant projective, il suffit de démontrer le théorème pour le cercle. Or dans le cercle, les angles des 2 faisceaux sont égaux, donc leurs rapports correspondants anharmoniques sont égaux, c. q. f. d.



Si deux faisceaux sont tels que leurs droites correspondantes se coupent sur une droite fixe, ils seront homographiques; il suffira de les déplacer d'une manière quelconque ^{autour d'un point} autour de leur centres pour que les points d'intersection des droites correspondantes se trouvent sur une conique passant par les centres des deux faisceaux.

Corollaire. Si deux angles de grandeur quelconque, mais constante, tournent autour de leurs sommets de manière que le p.d.i. int. de deux de leurs côtés décrive une conique passant par leurs sommets, leurs deux autres côtés se croiseront sur une seconde conique passant aussi par leurs sommets.

L théorème de Newton (génération organique des coniques) est un cas particulier du précédent, quand la conique directrice est une droite. (Les angles correspondants sont égaux)

Si la droite sur laquelle se coupent les 2 faisceaux est à l'infini, les droites correspondantes seront parallèles. D'où ce théorème:

Quand on a dans un plan 2 figures semblables, mais non semblablement placées, les droites homologues issues de 2 p. homologues se rencontrent sur une conique passant par ces 2 points.

Autre énoncé du théorème fondamental ^(suite de la note) ~~(de Desargues)~~:

Quand un hexagone (A B C D E) est inscrit à une conique, si de 2 sommets (A, C) on mène des droites aux 4 autres sommets, on forme 2 faisceaux homographiques (cà d. ayant même rapport anharmonique) — Si l'on coupe chacun d'eux par une transversale quelconque, le rapport anharmonique des 4 points d'intersection de l'une sera égal au rapp. anharmon. des 4 points d'intersection de l'autre. ^(ou une diagonale)

Si la deux transversales se confondent avec l'une des côtés de l'hexagone, on retrouve le théorème de Desargues sur l'involution de 6 points.

Corollaire : Un quadrilatère étant inscrit à une conique, si par un point quelconque de la courbe on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés, le produit des perpendiculaires abaissées sur les deux côtés opposés sera au produit des deux autres dans un rapport constant. (Le problème ad quatuor lineas, de Pappus, a donc pour solution une conique circonscrite au quadrilatère.)

— Autre forme de la propriété anharmonique :

Soient dans un plan 2 transversales quelconques, O, E 2 points quelconques sur la 1^{re}, O', E' 2 points fixes quelconques sur la 2^e. Si autour de 2 pôles fixes P, P' pris arbitrairement dans le plan on fait tourner 2 droites qui rencontrent les 2 transversales respectivement en 2 points A, A' tels qu'on ait constamment

$$(A) \quad \frac{OA}{EA} + \lambda \frac{O'A'}{E'A'} = \mu \quad (\lambda \text{ et } \mu \text{ const.})$$

Le point de concours des 2 droites mobiles engendrera une courbe qui passera par les 2 pôles P, P' .

En effet, les 2 faisceaux de centres P et P' seront homographiques. Or : Deux faisceaux homographiques étant situés dans le même plan, les droites homologues se coupent sur une conique qui passe par les centres des deux faisceaux.

Cas particulier : Si E, E' sont sur la droite P, P' , la courbe engendrée est une droite. Les propriétés de la droite découlent comme cas particuliers de celles des coniques.

En résumé, pour que l'équation (A) représente une droite, il suffit que les points E, E' où les 2 transversales rencontrent la droite PP' satisfont la relation suivante :

$$\frac{OE}{EE} + \lambda \frac{O'E'}{E'E'} = \mu$$

Chasles. - Note XVI.

Sur la propriété anharmonique des tangentes d'une conique.
Quand deux droites, situées dans un même plan, portent 2 systèmes de ⁴ points ~~homologues~~ ayant même rapport anharmonique, les droites qui joignent les points de l'un aux points correspondants de l'autre sont tangentes à une conique tangente aux 2 droites données.

Démonstration: La relation homographique étant projective, il suffit de démontrer le th. pour le cercle. Or si un angle est circonscrit à un cercle, et qu'on mène 2 tangentes qqes à ce cercle, et terminées à leur rencontre avec les 2 côtés de l'angle, ces tangentes seront vues du centre sous des angles égaux; donc les segments correspondants déterminés par leurs intersections sur les 2 côtés de l'angle seront vus du centre sous des angles égaux; donc le rapport anharmonique des 4 points d'intersection du 1^{er} côté est égal au rapp. anharmon. des 4 points homologues du 2^e côté, c. q. f. d.

Qualité: Le hexagone inscrit de Pascal (hexagramme mystique) correspond à l'hexagone circonscrit de Brianchon. Le théorème de Desargues correspond au théorème de Steiner: Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les droites menées d'un point qqe à ses 4 sommets et les 2 tangentes menées du même point à la courbe forment un faisceau en involution.

Le théorème ad quatuor lineas (v. note XV, p. 4) correspond celui-ci: Étant donné un quadrilatère circonscrit à une conique, et une tangente qqe à la courbe, le produit des distances de cette tangente à 2 sommets opposés du quadrilatère est dans un rapport constant avec le produit de ses distances aux 2 autres sommets.

[Cf. Poncelet, Théorie des polaires réciproques.]

— Autre forme de la propriété anharmonique:

Soient dans un plan 2 transversales fixes, O, E fixes fixes sur la 1^{re}, O', E' 2 points fixes fixes sur la 2^{de}.
Si deux points variables A, A' parcourent respectivement ces 2 droites, de manière qu'on ait constamment

$$\frac{OA}{EA} + \lambda \frac{O'A'}{E'A'} = \mu \quad (\lambda, \mu \text{ constants})$$

La droite AA' touchera constamment la même conique qui sera tangente aux 2 transversales fixes.

— Si, S étant le point de concours des 2 transversales,

$$\frac{OS}{ES} + \lambda \frac{O'S}{E'S} = \mu$$

la conique se réduit à un point, autour duquel tourne la droite AA' .
Cela a lieu quand E, E' coïncident avec S : l'équation

$$\frac{OA}{SA} + \lambda \frac{O'A'}{SA'} = \mu \quad \text{représente un point fixe}$$

Enoncé général: Quand 2 droites, dans un plan, sont divisées homographiquement, les droites qui joignent les points de la première aux points homologues de la seconde enveloppent une conique tangente aux 2 droites données.

Quand les 2 droites ne sont pas dans un même plan, les droites qui joignent leurs points homologues forment une hyperbole (cf. note IX.)

En remplaçant les 2 transversales par une circonférence, on obtient ce théorème: Étant donné 4 points fixes fixes O, E, O', E' sur une circonférence, si l'on prend sur cette circ. 2 p. variables tels qu'on ait:

$$\frac{\sin \frac{AO}{2}}{\sin \frac{AE}{2}} + \lambda \frac{\sin \frac{A'O'}{2}}{\sin \frac{A'E'}{2}} = \mu$$

La corde AA' enveloppera une conique qui aura un double point avec le cercle, et qui touchera la droite E, E' .

(ainsi)
Le système de 2 droites dans un plan offre un foule de propriétés analogues à celles du cercle et des autres coniques.
Si l'on prend pour E, E' les points diamétralement opposés à O, O' , la relation précédente devient :

$$\tan \frac{AO}{2} + \lambda \cdot \tan \frac{A'O'}{2} = \mu$$

Prothaire: Etant mené le cercle osculateur en un p. A d'une conique, toute tangente à la courbe le rencontre en 2 points tels, que la différence des cotangentes des demi-arcs compris entre les 2 points et le point A est constante.

Charles, Troisième époque §§ 30-34, et note XVIII.

Méthode de transformation du cercle en conique (Le Poivre)

Soit un cône à base circulaire, coupé par un plan P .

Pour construire la section conique sans mener ce plan, prenons la droite D suivant laquelle ce plan coupe le plan de la base, et la droite D' suivant laquelle un plan mené par le sommet S du cône parallèlement à P coupe le plan de base. Soit M un p. quelcun du cercle; on mène une transversale quelcun par M dans le plan de base; elle rencontre D en P et D' en Q ; on joint SQ , SM , on mène par P une parallèle à QS ; le point m où elle rencontre SM appartient à la section conique cherchée.

Même construction dans le plan

(La Hire.) D'où méthode

générale de transformation

des figures, au moyen d'un

pôle S , d'une formatrice

D et d'une directrice D' parallèle à D

Par exemple, si l'on prend pour

pôle le centre du cercle, on obtient

comme transformée une conique

ayant ce pôle pour foyer;

Propriétés caractéristiques:

1° points correspondants

sont en ligne droite avec le pôle S ;

2° droites correspondantes se

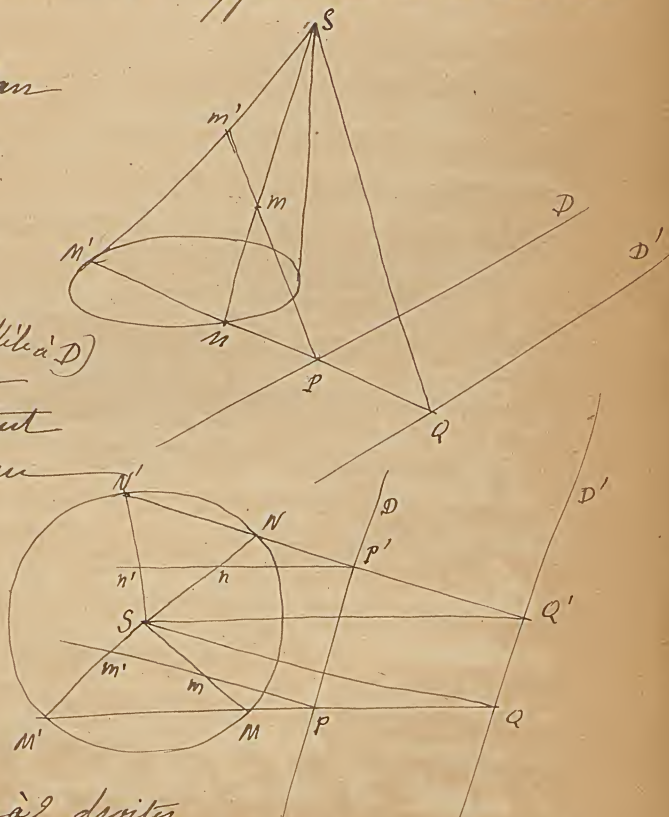
rencontrent sur la formatrice D ;

3° droites parallèles correspondantes à 2 droites

se rencontrent sur la directrice D' . Cette directrice correspond

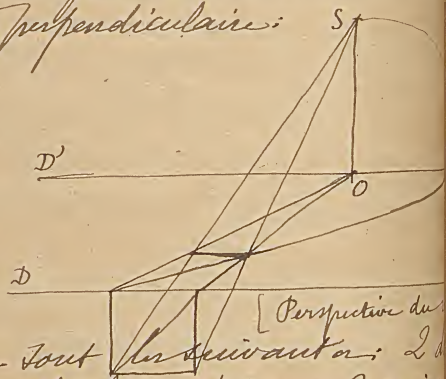
aux points à l'infini de la figure donnée transformée.

(En effet, si Q et Q' coïncident, mm' et mm' sont parallèles.)



Les figures transformées par la méthode de La Hire et de
 sont les figures homologues de Poncelet: le pôle S est le
 de homologie, la formatrice D est l'axe de homologie.
 Cette méthode de transformation revient à la perspective
 de prendre la formatrice pour ligne de terre, la directrice
 ligne de horizon, le pied de la perp. abaissée du pôle sur
 directrice pour point de vue, et le point de distance à
 égale à la longueur de cette perpendiculaire:

Dans la méthode de perspective
 de Stevin, S' Gravesande,
 Taylor et du P. Jacques,
 on emploie le point de vue
 rabattu sur le tableau, c.à.d.



S . Alors les deux propriétés
 caractéristiques de la perspective sont les suivantes: 1^o
 correspondantes se coupant sur la ligne de terre; 2^o points
 correspondants sont en ligne droite avec le point de vue
 (Voir traités de Jeaurat, Ozanam, Lambert (1773), M. Ch.

[Stevin a traité le problème inverse de la perspective,
 Etant donnés deux figures planes dont l'une est la pers.
 de l'autre, les placer dans l'espace de manière que la pers.
 ait lieu, et déterminer la position de l'œil.]

Comme cas particuliers de la méthode générale de trans-
 former: 1^o l'homothétie (formatrice et directrice à
 2^o la méthode de transformation du cercle en ellipse par
 des ordonnées, employée par Albert Dürer, Stevin, Grégoire
 (le pôle S est à l'infini)

Chasles — Note XX.

Sur la génération des courbes du 3^e degré par les 5 paraboles divergentes, et par les 5 courbes à centre.

Théorème: Si autour d'un point d'inflexion d'une courbe du 3^e degré, on fait tourner une transversale, et qu'elle ait 2 points où elle coupe la courbe ou même des tangentes, leur point de concours engendrera une droite;

Cette droite rencontrera ~~chaque~~ transversale en un point qui sera le conjugué harmonique du point d'inflexion par rapport aux deux points d'intersection de la courbe et de la transversale.

Corollaires: Les droites qui joignent deux à deux les points où 2 transversales rencontrent la courbe se coupent sur la susdite droite.

Cette droite passe par les points de contact des 3 tangentes menées à la courbe par le point d'inflexion. On l'appellera la polaire du point d'inflexion.

Toute courbe du 3^e degré ayant 1 ou 3 points d'inflexion, si l'on projette cette courbe de manière qu'un des points d'inflexion passe à l'infini, la polaire deviendra un diamètre de la courbe.

Si l'on envoie à l'infini, par perspective, non seulement le point d'inflexion, mais encore la tangente en ce point, la courbe aura un diamètre et n'aura pas d'asymptote: elle sera parabolique.

Ainsi une courbe quelconque du 3^e degré peut se transformer par perspective en une des 5 paraboles divergentes, et inversement, peut être obtenue par la perspective d'une parabole.
(supra le nombre (Newton))

Si au contraire on projette à l'infini la polaire d'une
d'inflexion, ce point devient le centre de la courbe.
Ainsi une courbe quelconque du 3^e degré peut se transformer
par perspective en une courbe des 5 courbes à centre, et
réciproquement, peut être obtenue comme perspective d'une
courbe des 5 courbes à centre.
En résumé, les courbes du 3^e degré ne peuvent donner
qu'à 5 espèces de cônes; en coupant ces cônes d'une
certaine manière, on forme les 5 paraboles divergentes
en les coupant d'une autre manière, on forme les 5 courbes
à centre.

Chasles — Note XXI.

Sur les ovales de Descartes, ou lignes aplanétiques.

Ces courbes sont les caustiques secondaires (développantes des caustiques de Schirnhausen) produites par la réflexion ou la réfraction dans un cercle éclairé par un point lumineux (Quételet, Sturm) — Théorème de Quételet :

Deux cercles fixes étant donnés dans un plan, si le centre d'un 3^e cercle mobile et de grandeur variable se meut sur le 1^{er} cercle, et que son rayon soit proportionnel à la distance de son centre à la circonférence du 2^e cercle, ce cercle mobile enveloppera une courbe du 4^e degré, qui sera l'ensemble de 2 ovales de Descartes conjugués.

Génération géométrique des lignes aplanétiques :

Projection stéréographique de l'intersection d'une sphère et d'un cône droit, l'axe étant placé à l'extrémité du diamètre de la sphère parallèle à l'axe du cône.

Soient 2 cônes droits à axes parallèles ; on projette leur intersection sur un plan perpendiculaire à leurs axes.

— Étant donnés 2 cercles dans un plan, si autour d'un point fixe, pris sur la ligne des centres, on fait tourner un transversal coupant chaque cercle en 2 points, les rayons menés (à ces 2 points) se couperont en 2 autres points du même lieu ^(des centres respectifs) géométrique sera une ligne aplanétique complète ayant pour foyers les 2 centres.

(Chaque point du lieu est tel que le rapport de ses distances aux 2 cercles est constant, en vertu du th. des transversales.)

Cette construction donne immédiatement les tangentes de la courbe, car la tangente à la cb en un point et les tangentes aux 2 cercles aux points correspondants concourent en un même point.

Soit un cercle et un point fixe dans son plan; so par
ou même un rayon vecteur à la circonférence, et une droite
qui fait avec un axe fixe un angle double de celui que
le rayon vecteur avec le même axe, et qu'on porte sur cette
droite, à partir du point fixe, un segment proportionnel
au carré du rayon vecteur; l'extrémité de ce segment
pour lieu une ligne aplanétique composée de 2 ovales
et ayant pour foyer le point fixe.

Si au lieu d'un cercle, l'extrémité du rayon vecteur
une ligne droite, on obtient une parabole ayant son foyer au

Les lignes aplanétiques ont toujours trois foyers, dont
quelconques peuvent servir à leur description.

Quand 2 foyers se confondent, la courbe a un
elle devient le Limaçon de Pascal (avec ses 2 foyers).

Quand 1 foyer est à l'infini, la courbe devient
conique, et conserve ses 2 autres foyers.

Les lignes aplanétiques ont 2 points infinis (caractéristique de ces courbes)
à l'infini.

Charles. — Note XXV.

Application du principe des relations contingentes à la question de déterminer, en grandeur et en direction, les trois axes principaux d'un ellipsoïde dont trois diamètres conjugués sont donnés.

Problème (en géométrie plane). Étant donnés 2 diamètres conjugués d'une ellipse, construire les axes principaux de cette courbe.

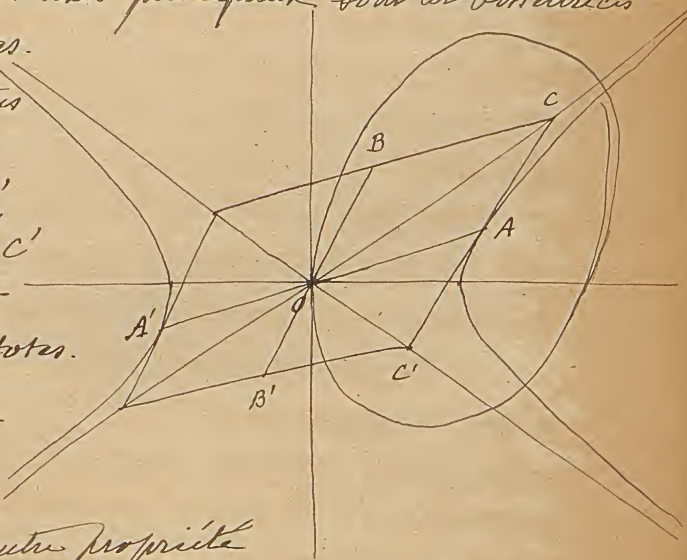
Réolvons d'abord le même problème pour l'hyperbole; dans ce cas la solution est très-simple: les asymptotes de l'hyperbole sont les diagonales du parallélogramme des diamètres conjugués, et les axes principaux sont les bissectrices des angles des asymptotes.

Soient AA' , BB' les diamètres conjugués donnés: par A on mène un parallèle à BB' , sur laquelle on porte AC , AC' égaux à OB , OB' ; on joint OC , OC' , ce sont les 2 asymptotes.

Pour transporter cette solution au cas de l'ellipse, il faut remplacer la considération

des asymptotes par une autre propriété qui subsiste dans le cas de l'ellipse.

Or si C et C' sont les foyers d'une ellipse passant par le centre O de l'hyperbole, cette ellipse sera tangente à l'axe transverse. Mais cette conique auxiliaire a pour axes principaux la tangente et la normale à l'hyperbole au point A , et de plus $AC = OB$. Elle est donc complètement déterminée, et il suffit de lui mener



la tangente et la normale en O pour avoir les axes de la
Remarque. L'excentricité AC portée sur la tangente est
égal à $\frac{b}{a}$; mais l'excentricité portée sur la normale est
et égal à $\frac{b}{a}$, c.à.d. au ^{semi-diam. conjugué} de l'hyperbole

Si l'on regarde la tangente et la normale en un p. A d'un
comme les axes principaux d'une Conique qui passera
centre de la 1^{re}; et dont l'excentricité, suivant la normale
égale au diamètre conjugué de celui qui aboutit au p.
Cette 2^e conique aura pour tangente et pour normale
les deux axes principaux de la 1^{re}.

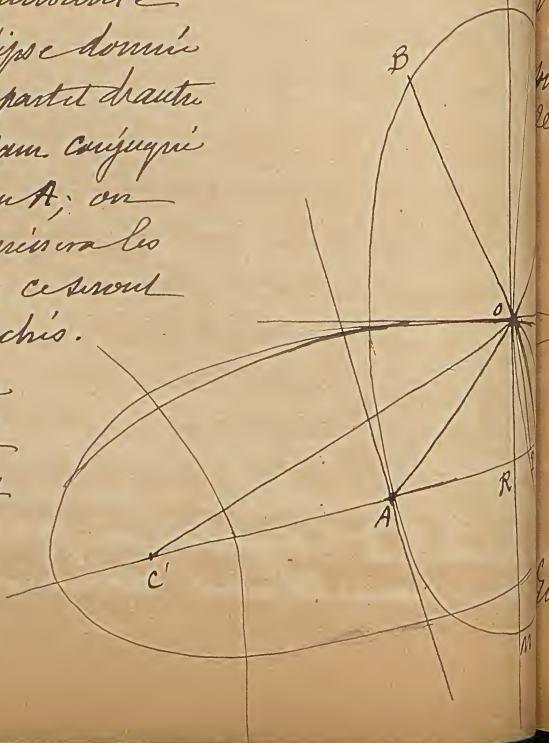
Ce théorème est vrai aussi bien pour l'ellipse que pour l'hyperbole
en vertu du principe des relations contingentes.

Appliquons - le à l'ellipse: dans ce cas, l'excentricité
sur la normale sera réelle / comme le diamètre conjugué
donc la conique auxiliaire aura ses 2 foyers (réels) sur
normale à la 1^{re} en A. Les rayons vecteurs ^{issus} de ce
au centre de la 1^{re} font des angles égaux avec les axes ^{minors}

D'où la construction suivante:

Sur la normale à l'ellipse donnée
au point A on portera de part et d'autre
AC, AC' égaux au demi-diam. conjugué
OB de celui qui aboutit en A; on
joindra OC, OC' et l'on mesurera les
bissectrices de leurs angles: ce seront
les axes principaux cherchés.

Remarque. La conique auxiliaire
peut être aussi bien une hyperbole
qu'une ellipse, car 2 courbes étant
homofocales ^{et ayant mêmes axes}.
excentricité $\frac{2a}{2c} = \frac{OC'}{OC}$;
pour l'ellipse: $2a = OC + OC'$.
donc orthogonales.



Pour déterminer les longueurs des axes principaux cherchés, on peut employer le théorème suivant:

Le produit des segments fait sur une normale à un conique par le diamètre qui lui est perpendiculaire & l'un des axes est égal au carré de l'autre demi-axe.

Par exemple, sur la normale à la 1^e conique au point A, on a:
 $AP \cdot AQ = OM^2$.

D'autre part, on sait que si l'on mène d'un point (O) d'une conique ou même la tangente et la perpendiculaire à l'un des axes, le produit des segments déterminés sur cet axe par ces 2 droites et par le centre est égal au carré de ce demi-axe. Ainsi, dans la 2^e conique, on a: $AP \cdot AQ = AN^2$.

Bonc: $AN = OM$.

Ainsi l'axe principal de la 2^e conique, dirigé suivant la normale à la 1^e , est égal à l'axe principal de la 1^e conique qui est normal à la 2^e .

On a grand axe (puisque il porte les 2 foyers réels) est égal à la somme ou à la différence des 2 rayons vecteurs suivant que la conique est une ellipse ou un hyperbole. On la construction:

Par l'intersection A d'un des diamètres conjugués donnés on mène une perp. au 2^e diamètre; on portera sur cette dr. à partir du p. A, 2 segments égaux à ce second demi-diamètre; AC, AC' ; on joindra OC, OC' ; on mènera les bissectrices des angles de OC, OC' ; ces bissectrices seront en direction les deux axes principaux de l'ellipse donnée. En grandeur, le grand axe sera égal à la somme de OC et OC' , et le petit axe à leur différence.

En effet, le produit $AP \cdot AR$ est égal à la fois ^{carrière} au petit axe de l'ellipse donnée et à l'axe transverse de l'hyperbole de centre A & de foyers C, C' passant par O.)

Problème : Étant donnés 3 diamètres conjugués d'une ellipse déterminée, en grandeur et en direction, les 3 axes principaux

Considérons un hyperboloïde à une nappes son cône asymptotique. Le plan tangent à l'hyperboloïde en M coupe le cône suivant une hyperbole Σ , dont les diamètres ^{ont leur carré} sont égaux et de signe contraire aux diamètres parallèles de l'hyperboloïde. (cf. note)

Prenons l'hyperbole Σ pour conique encadrée d'une quadrique passant par le centre de l'hyperboloïde ; cette quadrique est normale à l'un des axes principaux du cône, c'est-à-dire de l'hyperboloïde. D'autre part, elle aura pour axes la normale en M à l'hyperboloïde, et les axes de l'hyperbole Σ , qui sont les tangentes aux lignes de courbure de l'hyperboloïde en M . Donc, faisant abstraction du cône asymptotique et en étendant le théorème à tout les quadriques à centre, par le principe des relations conjuguées :

Si l'on regarde la normale en un point M d'une quadrique tangente aux 2 lignes de courbure en ce point comme l'axe d'une seconde quadrique passant par le centre de la première, normale à un des axes principaux, la conique encadrée de cette seconde quadrique située dans le plan tangent à la première aura les carrés de ses diamètres égaux et de signe contraire aux carrés des diamètres parallèles de la quadrique donnée.

Appliquons ces théorèmes à l'ellipsoïde la conique encadrée sera alors imaginaire, mais servira à construire les 2 coniques encadrées réelles. (OB, OC)

Soient b et c les 2 demi-axes ($b > c$) de la section faite à l'ellipsoïde par un plan diamétral parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde en M . La conique encadrée ^{donnée} située dans ce plan aura pour carrés de ses demi-axes $-b^2, -c^2$ ($-c^2 > -b^2$). Les 2 foyers réels seront parallèles à OB, OC.

Sur la normale à l'ellipsoïde en M on portera à partir de M les segments b et c ; dans le plan mené par la normale et une parallèle à OC , on construira ellipse ayant pour grand axe le segment b , et pour excentricité le segment c ; dans le plan mené par la normale et une parallèle à OB , on construira l'hyperbole ayant pour demi-axe transverse le segment c et pour excentricité le segment b . Cette ellipse et cette hyperbole seront les 2 coniques excentriques réelles de la seconde quadrique. Les deux cônes qui ont pour sommet le centre de l'ellipsoïde et pour bases respectives les 2 coniques excentriques auront pour axe principal commun la normale en O à la quadrique (seconde) c'est-à-dire un des axes principaux de l'ellipsoïde. Et comme il y a 3 quadriques différentes ayant les mêmes coniques excentriques, et passant par O , les 2 cônes auront pour axes ^{conjugés} principaux communs les 3 normales en O respectivement aux 3 quadriques homofocales, c'est-à-dire les 3 axes principaux de l'ellipsoïde. D'où la construction suivante: Ces 2 cônes se coupent suivant 4 arêtes, qui sont 2 à 2 dans 6 plans; ces 6 plans se coupent 2 à 2 suivant 3 autres droites; ces 3 droites seront les axes principaux de l'ellipsoïde.

Pour appliquer ces constructions au problème, il suffit de prendre pour M l'extrémité A d'un des 3 diamètres conjugués, et pour OB , OC les 2 autres diamètres conjugués donnés.

Pour déterminer les longueurs des 3 axes de l'ellipsoïde on a ce Théorème: La normale en un point M d'une quadrique rencontre le plan diamétral qui lui est perpendiculaire, à l'un des plans principaux P , en 2 points dont le produit des distances au point M est égal au carré du demi-axe normal au plan principal P .

Théorème: Le plan tangent en un point d'une quadrique
mené par ce point perpendiculairement à un des axes foyers
cet axe, à partir du centre, 2 segments dont le produit est
au carré de ce demi-axe. D'où le théorème

Quand 2 quadriques sont telles que chacune d'elles ait son
sur l'autre, et ses 3 axes principaux dirigés suivant la même
et les 2 tangentes aux lignes de courbure de cette autre, la
2^e qui est normal à la 1^{re} est égal à l'axe de la 1^{re}
est normal à la 2^e.

Corollaire: Si l'on regarde la normale et les 2 tangentes
lignes de courbure en un point d'une quadrique comme
axes de 3 quadriques passant par le centre de la proposée
tangentes respectivement à ses 3 plans principaux, les
de ces 3 quadriques qui sont normales à la proposée sont
respectivement aux 3 axes de la quadrique donnée.

Autre méthode pour résoudre le même problème:
Par l'intersection M de deux des 3 diamètres conjugués donnés,
2 droites égales et parallèles aux 2 autres diamètres conjugués
et traçons l'ellipse qui a pour axes ces 2 droites. Le centre
pour base cette ellipse et pour sommet le centre de l'ellipse
coupe cette surface suivant une ellipse homothétique à la première
le rapport de homothétie étant $\sqrt{3}$. Cette seconde ellipse
jouit de cette propriété, que si l'on prend sur elle 3 points
tels que le centre de leurs moyennes distances soit le centre
cette ellipse, les 3 dr. OA' , OB' , OC' seront 3 diamètres conjugués
de l'ellipse (Le centre M de cette ellipse est homothétique du
par rapport au centre O , et $OM = OM' \sqrt{3}$.)
D'où la solution suivante:

On donne les 3 diamètres conjugués OA, OB, OC d'un ellipsoïde, on construira l'ellipse qui passe par A, B, C et a pour centre le centre des moyennes distances de ces 3 points; on déterminera les axes principaux, soient b et c , on mènera par son centre une normale à son plan, et on exécutera sur cette ellipse la même construction que sur l'ellipse imaginaire prise pour conique excentrique, c.à.d. qu'on construira 2 ellipses et une hyperbole dans 2 plans rectangulaires entre eux et au plan de l'ellipse ABC ; les 2 cônes qui ont pour sommet le centre O et pour bases respectives cette ellipse et cette hyperbole auront mêmes axes que l'ellipsoïde; et les 2 quadriques qui ont pour coniques excentriques cette ellipse et cette hyperbole, et qui passent par le centre O auront leurs axes majeurs égaux respectivement aux 3 axes de l'ellipsoïde qui leur seront normaux, divisés par $\sqrt{3}$ (voyez de l'homothétie.)

Corollaire. Quand 3 diamètres conjugués d'un ellipsoïde doivent aboutir à 3 points donnés, et qu'un des 3 axes de l'ellipsoïde doit avoir une longueur donnée, le centre de cet ellipsoïde est indéterminé, et a pour lieu une quadrique dont le centre est le centre des moyennes distances des 3 points donnés.

Si l'on donne la ~~lieu~~ longueur de 2 des 3 axes de l'ellipsoïde, son centre a pour lieu l'intersection de 2 quadriques homofocales ayant pour centre le centre des moy. dist. des 3 points donnés.

Si l'on donne les longueurs des 3 axes de l'ellipsoïde, on a 8 solutions: les centres des 8 ellipsoïdes sont les points communs à 2 quadriques homofocales.

Quand 3 diamètres conjugués d'un ellipsoïde doivent aboutir à 3 points donnés, quel que soit le centre de cet ellipsoïde, les 3 axes ont les axes principaux communs à 2 cônes ayant ce centre pour sommet, et pour bases 2 coniques fixes indépendantes que des 3 points donnés.

Ces 2 coniques (qui sont dans la position réciproque de ces
excentriques) sont telles que tout cône ayant l'un pour
et pour sommet au point de l'autre est de révolution
suitz, ~~est~~ l'ellipsoïde qui aurait son centre au sommet
cône serait aussi de révolution ; donc :

Si l'on demande un ellipsoïde de révolution dont
diamètres conjugués aboutissent à 3 points donnés, le
de son centre sera composé d'une ellipse et d'une hyperbole
situés dans 2 plans rectangulaires (et perp. au plan des 3)
et dont chacun a pour foyers les sommets et pour
les foyers de l'autre.

Charles — Note XXVI.

Sur les imaginaires en géométrie.

«... On ne peut regarder l'expression d'imaginaire que comme indiquant seulement un état d'une figure dans lequel certaines parties, qui seraient réelles dans un autre état de la figure, ont cessé d'exister.... Ce sont donc les relations et propriétés que nous avons appelées contingentes qui donnent la clef des imaginaires en géométrie. »

On peut raisonner sur les imaginaires d'une figure pour découvrir des relations entre ^{parties} les parties réelles; mais il ne faut jamais considérer comme réelles en parties imaginaires, ce qui reviendrait à confondre l'état de la figure où elles sont réelles avec l'état où elles sont imaginaires.

« Ainsi, dans chaque système de diamètres conjugués de l'hyperbole, les directions des 2 diamètres sont réelles; mais la longueur de l'un d'eux est imaginaire: son carré seul est réel. Les propriétés générales de l'ellipse où n'entrent que les carrés des diamètres conjugués s'appliquent à l'hyperbole comme à l'ellipse; mais celles de ces propriétés où ces longueurs figurent au premier degré n'auront plus d'application dans l'hyperbole, parce que si l'on voulait construire l'axe imaginaire de l'hyperbole en le supposant réel, on commettrait une erreur... »

Considérons par ex. le cercle décrit sur l'axe transverse d'une hyperbole équilatère comme diamètre. Une corde du cercle, perp. à cet ax., sera réelle si son pied est à l'intérieur, imaginaire si il est à l'extérieur du cercle. Si on la construit en la supposant réelle, on obtient un point de l'hyperbole équilatère.
(Cf Lambert, Trigonométrie hyperbolique analogue à la circulaire.)
donnant l'interprétation du solutions imaginaires de celle-ci.

Chasles. — Note XXVII :

Sur l'origine de la théorie des polaires réciproques,
et celle des mots pôle et polaire.

Quand le sommet d'un cône circonscrit à une quad-
^{décrit} ^{parcourt} un plan, le plan de la courbe de contact passe
par un même point; et quand le sommet du cône est
une droite, le plan de contact passe toujours par un même
(Mongé, Géométrie descriptive.)

Quand le sommet du cône parcourt une quadrique,
le plan de contact enveloppe une autre quadrique
(et Brianchon, Journal de l'Éc. Polyt. 1806.)

Hexagone de Brianchon, déduit de celui de Pascal par
le principe de dualité.

De même, le problème : circonscire à une conique
un polygone dont les sommets soient sur des droites don-
nées se ramène à celui-ci : inscrire à une conique un poly-
gone dont les côtés passent par des points donnés (Euclide
Stavius, ap. Ann. de Math. t. I, pp. 122 et 190.)

Le terme de pôle est dû à Servois; celui de polaire à
(Ann. de Math. I, 337; III, 297.)

Pour les problèmes sus-énoncés, traités par Castillon et
(Mém. de l'Acad. de Berlin, 1776) par Euler, Fuss et
(Mém. de l'Acad. de Pétersbourg, 1780) par Giordano di
et Malfatti (Mém. della Società italiana, t. IV.) par
(Mém. Berlin, 1796) généralisés par Brianchon (Journal de
voir Gergonne (Ann. de Math. t. I, p. 337-342)
Poncelet, Traité des Propriétés projectives, p. 352.

Charles — Note XXVIII :

Généralisation de la théorie des projections stéréographiques.

Construire une quadrique tangente à 4 autres —

Si l'on fait la perspective d'une quadrique d'un point quelconque sur un plan quelconque, 1° les projections des courbes planes tracées sur la surface seront des coniques ayant un double contact (réel ou imaginaire) avec une conique unique qui sera la perspective du contour apparent de la surface; 2° le pôle de la corde de contact de chaque conique avec cette conique unique sera la projection du sommet du cône circonscrit à la quadrique suivant la courbe plane dont la 1^{re} conique est la projection; 3° les projections de 2 droites polaires réciproques par rapport à la quadrique sont telles que chacune passe par le pôle de l'autre, pris par rapport à la conique unique.

De cette manière on déduit un foule de propriétés d'un système de coniques inscrites à une conique unique. (Poncelet, Tr. des Prop. pr.)

La théorie analogue dans l'espace est celle d'un système de quadriques inscrites à une même quadrique (réelle ou imaginaire).

Deux surfaces sont inscrites l'une à l'autre quand elles se touchent suivant une courbe. Dans les quadriques, la dr. de contact est plane.

Quand 2 quadriques sont inscrites à une même quadrique, elles se coupent suivant 2 coniques (réelles ou imaginaires) dont les plans sont toujours réels (plans de symptose).

On peut aussi leur circonscrire 2 cônes (réels ou imaginaires) dont les sommets sont toujours réels (centres de homologie).

Quand 3 quadriques sont inscrites à une même quadrique, elles ont 6 plans de symptose et 6 centres de homologie (deux pour chaque couple de surfaces).

170
Ces 6 plans de symptose se rencontrent 3 par 3 suivant
4 droites concourantes (arêtes d'un angle solide tétraèdre)
les 6 plans forment les 4 faces et les 2 plans diagonaux
Ces 4 droites sont dites droites de symptose communes aux 8

- Les 6 centres d'homologie sont 3 par 3 sur 4 droites
situés dans un même plan; ils forment les sommets d'un
quadrilatère plan complet. Ces 4 droites sont dites droites
d'homologie communes aux 3 surfaces.

Tout point d'une droite de symptose commune est appelé
point de symptose commune

Tout plan passant par une droite d'homologie commune
est un plan d'homologie commune

- Quand 4 quadriques sont inscrites à une même quadrique
elles ont 8 points de symptose communes et 8 plans
d'homologie communs.

Chacun de ces 8 points est le point d'intersection de 6 des
plans de symptose des 4 surfaces prises 2 à 2.

Chacun de ces 8 plans contient 6 des 12 centres d'homologie
des 4 surfaces prises 2 à 2.

Problème: Étant données 4 quadriques inscrites à
une même quadrique, construire une nouvelle quadrique tangente
aux 4 premières et inscrite dans la 5^e.

On construira les 8 points de symptose et les 8 plans d'homologie
communs aux 4 quadriques inscrites.

1^{re} Solution: On prendra, par rapport à l'une quelconque des
surfaces, les pôles des 8 plans d'homologie, et l'on joindra
de ces pôles aux 8 points de symptose: les 64 droites ainsi
construites rencontreront la surface A en 128 points, dont chacun

de contact d'une ^{des} surfaces demandées avec la surface A.

2^e Solution: On prendra, par rapport à l'imaginaire A des surfaces, les plans polaires des 8 points de symptose; ces 8 plans rencontreront chacun des 8 plans de homologie suivant 8 droites.

Ces 8 droites ainsi obtenues, ou même 2 plans tangents à la surface A; chacun des 128 points de contact sera le point de contact d'une des surfaces demandées avec la surface A.

Il y a donc en général 128 solutions (16 par point de symptose commun, ou par plan de homologie commun aux 4 quadriques).

Si les 4 quadriques sont des sphères, elles n'ont qu'un point de symptose commun (leur centre radical). Il n'y a donc que 16 solutions.

Or 4 sphères quelconques, et une 5^e sphère qui leur est tangente, peuvent être considérées comme inscrites à une même quadrique.

En effet, supposons que la quadrique circonscrite ait un axe réel. Elle se réduit à une conique. Toute quadrique passant par cette conique peut être considérée comme inscrite à une même quadrique.

Le plan de cette conique sera pour elles un plan de symptose. Si la conique devient imaginaire, le plan de symptose reste réel, d'où l'on conclut (par le principe des relations contingentes)

que plusieurs quadriques ayant un plan de symptose commun peuvent être considérées comme inscrites à une même quadrique. Si le plan de symptose commun s'éloigne à l'infini, toutes les surfaces deviendront homothétiques. Donc:

Plusieurs quadriques homothétiques peuvent être considérées comme un système de quadriques inscrites à une même quadrique. Le problème revient dans ce cas à construire une quadrique à la fois tangente et homothétique à 4 quadriques homothétiques données.

Charles. — Note XXIX:

Démonstration d'un théorème d'où résulte le principe de dualité.

Si l'on transforme un plan par rayons vecteurs réciproques, on obtient une sphère qui passe par le pôle et dont le centre est sur la perpendiculaire abaissée du pôle sur le plan. Les plans perpendiculaires aux rayons vecteurs aux points où ils rencontrent la sphère passent par l'extrémité du diamètre issu du pôle, c'est-à-dire par le point correspondant du plan.

Théorème. Si plusieurs plans passent par un même point (S) tous points correspondants sont dans un même plan.

En effet, chacun de ces plans a pour transformée une sphère, et toutes ces sphères passent par le pôle P et par un point ^{même} O qui est le transformé du point d'intersection de tous les plans (S). La droite PO étant une corde commune à toutes les sphères, le plan perpendiculaire en O à cette droite passera par les extrémités de leurs diamètres issus du pôle, c'est-à-dire par les points correspondants de tous les plans, c. q. f. d.

Ainsi ce plan correspond au point S comme les points du plan correspondent aux plans qui passent par le point S: il résulte une réciprocity entre les figures formées par des points, et les figures enveloppées par les plans correspondants à ces points, les unes étant les transformées des autres suivant le même procédé. Elles jouissent des propriétés de la dualité.

Charles. — Note XXX:

Sur les courbes et surfaces réciproques de Monge.
Généralisation de cette théorie.

Courbes réciproques de Monge:

$$\begin{cases} x' = p \\ y' = px - y \end{cases} \quad \begin{cases} x = p' \\ y = p'x' - y' \end{cases}$$

Surfaces réciproques de Monge:

$$\begin{cases} x' = p \\ y' = q \\ z' = px + qy - z \end{cases} \quad \begin{cases} x = p' \\ y = q' \\ z = p'x' + q'y' - z' \end{cases}$$

A chaque plan tangent de la 1^{re} surface correspond un point de la seconde; et quand plusieurs plans tangents à la 1^{re} passent par un même point, les points correspondants ~~sont~~ de la seconde sont dans un même plan.

Les surfaces réciproques se correspondent donc l'une à l'autre suivant le principe de dualité. En effet, elles sont polaires réciproques par rapport au paraboloïde de révolution:

$$x^2 + y^2 = \alpha z.$$

Application à l'intégration des équations aux dérivées partielles. — Pour ces surfaces réciproques on a entre les dérivées secondes les relations réciproques suivantes:

$$\begin{cases} z' = \frac{t}{zt - s^2} \\ s' = -\frac{s}{zt - s^2} \\ t' = \frac{z}{zt - s^2} \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{t'}{z't' - s'^2} \\ s = -\frac{s'}{z't' - s'^2} \\ t = \frac{z'}{z't' - s'^2} \end{cases}$$

Autres surfaces réciproques (non polaires réciproques)
inventées par Charles :

$$\begin{cases} x' = q \\ y' = -p \\ z' = -px - qy + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = q' \\ y = -p' \\ z = -p'x' - q'y' + z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = -\frac{z}{zt - s^2} \\ s' = -\frac{s}{zt - s^2} \\ t' = -\frac{t}{zt - s^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -\frac{z'}{z't' - s'^2} \\ s = -\frac{s'}{z't' - s'^2} \\ t = -\frac{t'}{z't' - s'^2} \end{cases}$$

$$zt - s^2 = \frac{1}{z't' - s'^2}$$

Ces surfaces peuvent aussi servir à l'intégration des équations aux dérivées partielles -

Propriété mécanique de ces surfaces réciproques :

Une surface étant donnée, on pourra lui imprimer un mouvement hélicoïdal infiniment petit, ayant pour axe et tel que les plans normaux aux trajectoires des différents points dans ce mouvement seront précisément les plans tangents à la surface réciproque aux points correspondants.

Charles: — Note XXXI.

Propriétés nouvelles des surfaces du second degré, analogues à celles des foyers dans les coniques.

— La tangente et la normale en un point d'une conique rencontrent chacun des deux axes principaux en 2 points qui sont conjugués harmoniques par rapport aux 2 foyers (réels ou imaginaires) situés sur cet axe. — De même.

La normale et le plan tangent en un point d'une surface du 2^e degré rencontrent chacun des 3 plans principaux en un point et ces 3 points sont sur une droite; le point est le pôle de la droite par rapport à une conique située dans le plan principal.

Soit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Équation de la surface; les 3 coniques seront :

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Si $a > b > c$, on voit que la conique située dans le plan du grand et du moyen axe est une ellipse; la conique située dans le plan du grand et du petit axe est une hyperbole; enfin la conique située dans le plan du moyen et du petit axe est imaginaire.

Ces coniques s'appellent coniques concentriques ou focales de la surface considérée.

De même qu'il y a dans les coniques un 3^e couple de foyers imaginaires à l'infini, il y a dans les quadriques une 4^e conique concentrique, imaginaire et à l'infini.

Autre forme de la même propriété :

Si en chaque point d'une surface du 2^e degré on mène le normal et les tangentes aux 2 lignes de courbure, ces 3 normales rencontreront chacune des 3 plans principaux en 3 points tels que la polaire de l'un d'eux par rapport à la conique exc. située dans ce plan passe par les deux autres.

Chacune des 3 coniques excentriques, est située dans une section principale; elle a pour foyers ceux de cette section et pour sommets les foyers des 2 autres sections principales.

Relation entre les 3 coniques excentriques :

Une des 3 coniques étant donnée, chacune des 2 autres sera un plan mené perpendiculairement à celui de la 1^{re} et pour sommets les foyers, et pour foyers les sommets de la première, situés sur ~~son~~^{ses} axe principal. (par l'un d'eux axes)

Quand 2 quadriques ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, elles ont les mêmes coniques excentriques; réciproquement, quand 2 quadriques ont ^{une} même conique excentrique, elles ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers.

Théorèmes analogues pour les coniques et les quadriques.

C. — Quand un angle est circonscrit à une conique, les normales de cet angle rencontrent chaque axe en 2 points conjugués harmoniques par rapport aux 2 foyers situés sur cet axe.

Q. — Quand un cône est circonscrit à une quadrique, ses sections principales rencontrent chacune des plans principaux de la quadrique en 3 points tels que la polaire de l'un d'eux par rapport à la conique excentrique de ce plan, passe par les 2 autres.

C. — Si ~~deux~~^{un point} point pris dans le plan d'une conique aux 2 points directs forment des angles égaux avec les 2 tangentes du même point (respectivement) à la conique.

Q. — Si d'un point de l'espace on mène 2 cônes, l'un circonscrit à une quadrique, l'autre ayant pour base une de ses coniques excentriques, ces 2 cônes auront mêmes axes et mêmes lignes focales.

C. — Si d'un point un point d'une conique à ses 2 foyers, la normale et la tangente en ce point sont bissectrices de l'angle des 2 rayons vecteurs.

Q. — Si l'on construit un cône ayant pour sommet un p. q. q. d'une quadrique, et pour base une de ses coniques excentriques, la normale et les tangentes aux 2 lignes de courbure en ce point seront les axes principaux de ce cône. (Réciproque.)

Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, les 2 lignes focales du cône seront les 2 génératrices de l'hyperboloïde qui passent par le sommet du cône.

Corollaire: Si par une tangente en un p. d'une quadrique on mène 2 plans tangents à l'une des coniques excentriques, ils seront également inclinés sur le plan tangent à la surface, mené par la tangente.

Deux cônes ayant mêmes axes et mêmes lignes focales se coupent à angle droit; donc:

Le contour apparent d'une surface du 2^e degré, vue d'un point quelconque de l'espace, et l'une de ses coniques excentriques, paraissent se couper à angle droit.

Les deux coniques excentriques réelles d'une quadrique, vues d'un point quelconque de l'espace, paraissent se couper à angle droit.

Les cylindres étant des cônes particuliers (sommet à l'infini) les théorèmes précédents sont encore vrais des projections sur un plan quelconque: ainsi:

Les projections orthogonales des deux coniques excentriques d'une quadrique sont deux coniques homofocales.
(sur un même plan)

C. — Si par un point quelconque du plan d'une conique deux droites rectangulaires telles que le pôle de l'une par rapport à la conique soit sur l'autre, ces 2 droites rencontreront les axes principaux en 2 points conjugués harmoniques rapport aux foyers (réels ou imaginaires) situés sur ces axes.

Q. — Si par un point quelconque de l'espace on mène 3 droites rectangulaires telles que la polaire de chacune d'elles, par rapport à une quadrique donnée, soit dans le plan des 2 autres, ces 3 droites rencontreront chacun des 3 plans principaux de la quadrique en 3 points qui seront tels, que la polaire de chacun d'eux par rapport à la conique excéntrique de ce plan passe par les 2 autres.

C. — Toute transversale menée par le foyer d'une conique est perpendiculaire à la polaire de ce foyer par rapport à la conique.

Rem. Toute droite passant par un foyer peut être considérée comme tangente à une conique d'axe nul ayant pour ses foyers les deux foyers, c'est-à-dire à la double excéntricité.

Q. — Tout plan transversal tangent à une conique excéntrique d'une quadrique, a son pôle (pris par rapport à la surface) sur la perpendiculaire menée à ce plan par son point de contact avec la conique.

C. — Étant donnée une transversale quelconque dans le plan d'une quadrique, si l'on prend son pôle par rapport à cette quadrique, et le point harmonique de celui-ci sur elle coupe le grand axe par rapport à la conique, la droite qui joindra ces 2 points sera perp. à la transversale.

Q. — Étant donnée une quadrique et un plan transversal, si l'on prend son pôle par rapport à cette surface, et le pôle de la trace de ce plan sur la conique excéntrique par rapport à la conique, la droite qui joindra ces 2 pôles sera perpendiculaire au plan transversal. (Ces théorèmes comprennent les précédents comme particuliers.)

- C. — Le produit des distances des foyers d'une conique à une tangente quelconque est constant.
- Q. — Pour chaque plan tangent à une quadrique, le produit des distances aux 2 points d'un des coniques concentriques ou les tangentes à cette conique sont parallèles à ce plan, est constant.
- C. — Le produit des distances d'un foyer d'une conique à deux tangentes parallèles est constant.
- Q. — Le produit des distances de chaque point d'une conique concentrique d'une quadrique à 2 plans tangents à la surface, parallèles entre eux et parallèles à la tangente à la conique en ce point, est constant.
- C. — Si par un foyer d'une conique on mène une droite parallèle à une tangente quelconque à la courbe, la différence des carrés des distances de ces 2 droites au centre de la conique est constante.
- Q. — Si l'on mène un plan tangent quelconque à une quadrique, et un plan parallèle au premier tangent à une conique concentrique, la différence ^{des carrés} des distances de ces 2 plans au centre de la surface est constante.
- C. — Le sommet d'un angle droit dont un côté glisse sur une conique, et l'autre côté sur un foyer, décrit engendrant la circonférence d'une sphère sur le grand axe de la courbe comme diamètre.
- Q. — Le sommet d'un angle trièdre trirectangle, dont une des faces glisse sur une quadrique, et dont les 2 autres faces glissent respectivement sur les 2 coniques concentriques, parcourt la sphère décrite sur le grand axe de la surface comme diamètre.

Analogie des coniques excentriques des quadriques avec
lignes focales des cônes du 2^e degré :

C. — Tout plan perpendiculaire à une ligne focale coupe
le cône suivant une conique ayant pour foyer le point
où la ligne focale coupe ce plan.

A. — Le plan normal à une conique excentrique en un
de ses points coupe la quadrique suivant une conique
qui a un foyer en ce point.

§ 2. Propriétés de deux ou de trois surfaces qui ont les
mêmes coniques excentriques.

Par un point quelconque de l'espace on peut faire passer 3 quadriques
ayant pour conique excentrique une conique donnée; c'est-à-dire
un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à 2 nappes; ces 3 surfaces se coupent à angles droits (par leurs
lignes de courbure, Dupin) Les 3 tangentes à leurs
au point donné sont les axes principaux du cône ayant
pour sommet et pour base la conique excentrique donnée
et les lignes focales du cône sont les 2 génératrices du hyperboloïde
à une nappe qui passent par son sommet.

— Corollaire: Quand 2 surfaces du 2^e degré ont une même
conique excentrique, si l'on prend un point quelconque de l'espace
pour sommet de 2 cônes circonscrits respectivement aux 2 surfaces,
ces 2 cônes auront mêmes axes principaux et mêmes lignes focales;
les 3 axes principaux seront les normales aux 3 surfaces qui
pourrait faire passer par le sommet commun des cônes, et ces surfaces
auraient les mêmes coniques excentriques que les surfaces données
et les 2 lignes focales seront les génératrices du hyperboloïde à
nappe qui est une des 3 quadriques.

Corollaire: Quand 2 quadriques ont une même conique excentrique, leurs contours apparents, vus d'un point quelconque, semblent se couper à angle droit. — Si le point de vue est à l'infini:

Les projections de ces 2 surfaces sur un plan quelconque sont 2 coniques homofocales (en particulier, leurs sections principales.)

C. — Si sur la tangente et la normale en un point d'une conique, prises pour axes principaux, on construit deux autres coniques, passant par le centre de la conique donnée et normales respectivement à ses 2 axes principaux, ces coniques seront homofocales, et dans chacune d'elles, l'axe dirigé suivant la normale à la proposée sera égal à l'axe qui dans celle-ci est normal à la nouvelle conique considérée. (cf. note XXV.)

Q. — Si la normale et les 2 tangentes aux lignes de courbure en un point d'une quadrique sont prises pour axes principaux de 3 autres quadriques passant par le centre de la proposée et normales respectivement à ses 3 axes principaux, ces quadriques auront mêmes coniques excentriques, et dans chacune d'elles, l'axe dirigé suivant la normale à la proposée sera égal à l'axe de celle-ci qui est normal à la quadrique considérée.

Quand deux quadriques ^{sont} homofocales (dont les sections principales sont homofocales, ou qui ont les mêmes coniques excentriques) on a:

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2$$

Quand deux quadriques sont homofocales, si l'on mène 2 plans parallèles tangents respectivement à ces 2 surfaces, la différence des carrés des distances au centre des 2 surfaces est constante.

Corollaire: Quand un ellipsoïde et un hyperboloïde ont mêmes coniques excentriques, les plans tangents à l'ellipsoïde, parallèles aux plans tangents au cône asymptote de l'hyperboloïde, sont à une distance constante du centre commun des 2 surfaces.

Dans deux quadriques de même espèce, on appelle points correspondants deux points dont les coordonnées suivant chaque axe, sont proportionnelles à cet axe. — Quand deux quadriques de même espèce sont homofocales, la différence des carrés de 2 demi-diamètres tirant à 2 points correspondants est constante. — La distance entre 2 points ^{opposés} respectivement sur les 2 surfaces est égale à la distance des 2 points correspondants (cf. Ivory, Attraction).

C. — Quand 2 ellipsoïdes sont homofocales, si par un point pris sur un de leurs axes on mène 2 transversales qui fassent avec l'autre axe des angles dont les cosinus soient proportionnels aux diamètres des 2 ellipsoïdes dirigés suivant ce second axe, les segments interceptés respectivement par les 2 ellipsoïdes sur ces 2 transversales seront proportionnels aux diamètres dirigés suivant le premier axe. (Mac-Laurin, Tr. des Fluxions).

Q. — Quand 2 quadriques sont homofocales, si par un point pris sur un de leurs axes, on mène une transversale à l'une d'elles puis une seconde transversale telle que les cosinus des angles qu'elles font avec chacun des 2 autres axes soient proportionnels aux diamètres des surfaces dirigés suivant ces axes : les segments interceptés sur les 2 transversales respectivement par les 2 surfaces seront proportionnels aux diamètres des 2 surfaces dirigés suivant le 1^{er} axe; les sinus des angles que les 2 transversales font avec le 1^{er} axe seront proportionnels aux diamètres des 2 surfaces perpendiculaires au 1^{er} axe; et ces deux diamètres seront correspondants dans les 2 surfaces.

Application à l'attraction d'un ellipsoïde sur un point pris sur un de ses axes (cf. Traité des Fluxions, 653.)

C. — Quand 2 coniques sont homofocales, si d'un point pris sur un des axes on leur mène 2 tangentes, les cosinus des angles qu'elles font avec l'autre axe sont proportionnels aux 2 diamètres dirigés suivant cet axe.

Q. — Quand 2 quadriques sont homofocales, si par une droite située dans un de leurs plans principaux on leur mène 2 plans tangents, les cosinus des angles qu'ils forment avec l'axe perpendiculaire à ce plan principal sont proportionnels aux 2 diamètres dirigés suivant cet axe.

(cf Legendre, Mém. sur l'attraction des ellipsoïdes, Acad. Sc. 1788.)

§ III Systèmes de surfaces du second degré ayant mêmes coniques excentriques.

On peut décrire dans un plan une infinité de coniques ayant pour foyers 2 points donnés : elles forment 2 séries d'ellipses et d'hyperboles orthogonales les unes aux autres.

Q. — On peut former une infinité de quadriques ayant pour conique excentrique une conique donnée ; 3 séries : ellipsoïdes, hyperboloïdes à une nappe, hyperboloïdes à 2 nappes. Deux surfaces quelconques, d'espèce différente, se coupent partout à angle droit, et suivant une ligne de courbure commune. Trois surfaces quelconques, d'espèces différentes, se coupent en 8 points : en chacun deux les normales aux surfaces sont les axes principaux du cône qui a ce point pour sommet, et pour base une des coniques excentriques communes aux 3 surfaces ; et les 2 génératrices du hyperboloïde à 2 nappes qui passent en ce point sont les 2 lignes focales du cône. Les coniques homofocales jouissent des propriétés d'un système de coniques inscrites à un même quadrilatère : les côtés du quadrilatère sont imaginaires, mais en 2 sommets opposés, réels, sont les 2 foyers.

La droite qui joint les 2 foyers peut être considérée comme l'axe commun des coniques inscrites au quadrilatère. (Poncelet)

Q. — Les quadriques homofocales peuvent être considérées comme inscrites à une même surface développable, imaginée mais ayant 2 lignes de striction réelles, à savoir les 2 coniques excen- triques communes aux surfaces; les 2 autres lignes de striction sont imaginaires; l'une est la 3^e conique commune, l'autre est à l'infini. Les 2 lignes de striction réelles peuvent être regardées comme des surfaces dont une au moins est nul; elles appartiennent donc au système des quadriques homofocales.

Th: — Des quadriques ayant mêmes coniques excen- triques, ou 2 coniques, considérées comme des surfaces infiniment petites, possèdent toutes les propriétés d'un système de quadriques inscrites à une même surface développable.

Étant données plusieurs quadriques homofocales, si l'on coupe par un plan transversal quelconque, qui les coupe suivant des coniques, et qu'on prenne les coniques pour les courbes de contact d'autant de cônes circonscrits à ces surfaces, tous ces cônes auront leurs sommets sur une même droite perpendiculaire au plan transversal; en d'autres termes, les pôles de ces cônes par rapport aux surfaces sont sur une perpendiculaire à ce plan.

Corollaire: Considérant les 2 coniques excen- triques précédentes, si l'on mène un plan transversal quelconque, et qu'on prenne par rapport à chaque conique le pôle de la trace du plan transversal sur le plan de cette conique, la droite qui joint les 2 pôles est perpendiculaire au plan transversal. — Si ce plan transversal est tangent à la quadrique, cette droite sera la normale à la surface.

(Car ce point sera le pôle du plan transversal par rapport à la surface.) — Si par une ^{droite} quelconque de l'espace on mène des plans tangents à des quadriques homofocales, les normales à ces surfaces

les points de contact forment un paraboloïde hyperbolique.

Si la droite est normale à une des quadriques, le paraboloïde se réduit à une conique, et les points de contact sont sur une courbe plane du 1^{er} degré.

Si la droite est dans un des plans principaux, les points de contact sont sur une circonférence.

Si l'on prend un point quelconque de l'espace pour sommet commun de cônes circonscrits à des quadriques homofocales, les plans des courbes de contact envelopperont une surface développable telle que chacun de ses plans tangents la coupe suivant une conique; les 3 plans principaux des quadriques et les 3 plans principaux des cônes circonscrits seront tangents à cette surface développable. Cette surface est du 1^{er} degré, et son arête de rebroussement est la courbe gauche du 3^e degré.

Si d'un point quelconque de l'espace on mène des normales à des quadriques homofocales, ces normales formeront un cône du second degré; les plans tangents aux quadriques menés par les pieds des normales envelopperont une surface développable du 1^{er} degré.

Étant donné un système de quadriques homofocales, si d'un point pris dans un de leurs plans principaux on leur mène des normales, toutes ces normales seront situées dans 2 plans, le plan principal et un plan perpendiculaire à ce plan principal; les pieds des normales comprises dans le plan principal seront sur une courbe du 3^e degré, dite focale à froid (Quetelet)^(?); les pieds des normales comprises dans le 2^e plan sont sur une circonférence ayant pour diamètre la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la polaire de ce point par rapport à la conique excentrique du plan principal où est le point; les plans tangents aux quadriques menés par les pieds des premières normales, enveloppent un cylindre parabolique; ceux menés par les pieds des autres focales des sections faites dans un cône droit par des plans menés par une droite tangente au cône et perpendiculaire à l'arête du p. de contact.

autres normales passent tous par une même droite du plan
 — Si l'on mène des normales parallèles entre elles à des g
 homofocales, le lieu des pieds de ces normales sera une c
 équilatère, dont une asymptote sera parallèle à ces nor
 — Si l'on mène un plan transversal q^{quel} à des quad
 homofocales, et qu'on trace toutes les normales aux quad
 situées dans ce plan, ces normales envelopperont une cour
 les plans tangents aux surfaces menés par les pieds de ces nor
 passeront tous par une même droite; les pieds des normales
 les surfaces formeront une focale à nœud.

C. — Le sommet d'un angle droit décrit les côtés g^{énéral}
 L'omique homofocales décrit une circonférence.

Q. — Quand 3 plans rectangulaires sont respectivement
 à 3 quadriques homofocales, le point d'intersection de ces
 se trouve sur une sphère. (Bobillier, Ann. de Math. III)

Charles. — Note XXXII :

Théorèmes analogues, dans les surfaces du second degré, aux théorèmes de Pascal et de Brianchon dans les coniques.

On peut formuler le théorème de Pascal comme suit :

Étant donnée une conique et un triangle dans son plan, les 3 cordes de la conique inscrites dans les angles du triangle rencontrent les côtés opposés du triangle en 3 points qui sont alignés droits.

— Quand les 6 arêtes d'un tétraèdre rencontrent une quadrique en 12 points, ces 12 points sont trois à trois sur le plan dont chacun contient 3 points appartenant aux 3 arêtes issues d'un même sommet ; ces 3 plans rencontrent respectivement les faces opposées à ces sommets suivant 3 droites qui sont des génératrices du même système d'un hyperboloïde à une nappe.

Corollaires : Quand les 6 arêtes d'un tétraèdre sont tangentes à une surface du second degré, le plan des 3 points de contact des arêtes issues d'un même sommet rencontre la face opposée suivant une droite ; les 3 droites ainsi déterminées appartiennent à un même hyperboloïde à une nappe.

Quand un tétraèdre est inscrit à une quadrique, les plans tangents menés par ses sommets rencontrent respectivement les faces opposées suivant 3 droites qui sont des génératrices d'un même hyperboloïde.

On peut formuler le théorème de Brianchon comme suit :

Étant donnée une conique géq. et un triangle dans son plan, si l'on joint le point d'intersection de 2 tangentes issues de 2 sommets du triangle au 3^e sommet, les 3 droites ainsi obtenues concourent en un même point.

— Si par les 6 arêtes d'un tétraèdre géq. on mène 12 plans tangents

à une quadrique, ces 12 plans se rencontrent trois à trois
points dont chacun est l'intersection des 3 plans menés par
arêtes d'une même face; les droites qui joignent ces points
respectivement aux 4 sommets opposés à ces faces sont
génératrices de même système d'un hyperboloïde à une

Corollaires: Quand les 6 arêtes d'un tétraèdre sont tangentes
à une quadrique, les plans tangents menés par les arêtes d'une
même face se rencontrent en un point; si l'on joint chacun
de ces points au sommet opposé, on obtient 4 droites
sont des génératrices de même système d'un hyperboloïde

Quand un tétraèdre est inscrit à une quadrique, les
droites qui joignent ses sommets respectivement aux points de
des faces opposées sont des génératrices d'un hyperboloïde

2 Théorèmes généraux sur un tétraèdre et une quadrique
placés d'une manière quelconque dans l'espace:

- Les droites qui joignent les sommets du tétraèdre respectivement
aux pôles des faces opposées (pris par rapport à la surface)
sont des génératrices de même système d'un hyperboloïde.
Les droites d'intersection des faces du tétraèdre avec les
plans polaires des sommets opposés sont des génératrices d'un hyperboloïde.

- Le plan polaire de chaque sommet rencontre les arêtes de la face
opposée en 3 points: on a ainsi 12 points, qui sont
situés sur une même quadrique; si, par le pôle de chaque
sommet, on mène et les 3 arêtes de cette face ou même 3 plans,
on obtient 12 plans qui sont tangents à une même quadrique.

(Toujours la dualité)

- Ces théorèmes sont des propriétés d'un tétraèdre et d'une quadrique
tétraèdre polaire réciproque. ^(par rapport à une quadrique) Il y a donc une dualité entre
les pôles des faces et les faces les plans polaires des sommets et les sommets.

Charles. — Note XXXIV.

Sur la dualité dans les Sciences mathématiques.

Deux espèces de géométrie : à la géométrie cartésienne ou le point joue le rôle d'élément, de monade, s'oppose une nouvelle géométrie où ce rôle est dévolu à la droite (ou géométrie plane) ou au plan (dans l'espace) [coordonnées tangentielles].
 Qualisme universel de Charles (cf. note V : la géométrie a un double objet : ordre et mesure : d'où projective, métrique.)

Exemple de dualité, pris dans le Art du tourneur :

Deux manières de décrire une courbe ou de engendrer un profil :
 1° faire tourner tout et en fixant le tour ; 2° faire tourner le tour en fixant le tout.

Tout mouvement d'une figure plane dans un plan peut être rapporté à une figure fixe de ce plan, et représentée par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe. Si, inversement, on fait rouler la courbe fixe sur la courbe mobile, en fixant celle-ci, chaque point de celle-ci (devenu fixe) décrira sur le plan de l'autre (devenu mobile) la même ~~courbe~~ figure qu'il décrivait dans le premier mouvement, quand il était mobile, et le plan fixe.

Deux manières de décrire des courbes, avec un stylet mobile sur un plan fixe, ou avec un stylet fixe sur un plan mobile.

Exemple : double description de l'ellipse : par un point lié à 2 points qui glissent sur 2 droites fixes, ou par un point fixe sur un plan ^{fixe} sur un plan ^{mobile} dont 2 droites glissent sur 2 points fixes sur le plan fixe. (Tour à ovale de Léonard de Vinci.)

Le même pour toutes les épicycloïdes —

Epicycloïde de Nicomède : angle invariable dont un des côtés glisse sur un point fixe, et dont l'extrémité de l'autre côté glisse sur une droite passant par ce point fixe, et portant le stylet en un autre point fixe.

Le même pour la cissàide de Dioctès, la focale a' n'est
général toutes les propriétés de la parabole.

On peut construire aussi les courbes en les construisant, non
le lieu d'un point, mais comme l'enveloppe d'une droite
remplaçant l'style par une lame tranchante.

[Quoi qu'en dise Chasles, ces exemples ne se rapportent pas à la
de l'espace, mais à la relativité du mouvement. L. C.]

Exemple de Dualité, pris dans la Mécanique cette
Double mouvement de translation et de rotation des

Le même, tout déplacement infiniment petit d'un
corps d'un double mouvement ^{analogue} ~~semblable~~ (hélicoïdale)

La rotation est un mouvement primitif et élémentaire
que l'on devrait traiter directement comme la translation
au lieu de lui faire dériver. En dynamique, le couple
élémentaire irréductible comme la force.

Composition des rotations et des couples, analogue à celle
translations et des forces (un système de rotations peut
réduire à 2 rotations autour de 2 axes dont un arbitraire
si l'on place cet axe à l'infini, on a 1 rotation et 1 trans

Cf. Poincaré, Th de la rotation des corps; Aug. Comte, Ph. pos.

Analogie des forces et des moments (les unes relatives aux
les autres aux plans) On retrouve en mécanique la dualité
(autre)

Chasles. — Additions.

Théorème de Desargues: Si deux triangles situés dans l'espace ou dans un même plan ont leurs sommets placés deux à deux sur trois droites concourantes, leurs côtés se rencontrent deux à deux ~~en~~ en trois points situés sur une même droite.

La réciproque est vraie.

Théorème correspondant, de Poncelet: Quand deux tétraèdres ont leurs sommets placés deux à deux sur 4 droites concourantes, les plans de leurs faces se coupent deux à deux suivant 6 droites qui sont dans un même plan.

Généralisé par Chasles: Quand deux tétraèdres ont leurs sommets placés deux à deux sur 4 génératrices de même système d'un hyperboloïde à une nappes, leurs faces se coupent deux à deux suivant 6 autres droites qui sont les génératrices d'un autre hyperboloïde.

Théorème général sur la relation projection dans un plan:

Si l'on a dans un plan deux figures qui peuvent être mises en perspective, de sorte que leurs points homologues se correspondent, il y a en général 3 points de l'une qui coïncident avec leurs homologues de l'autre. Un de ces points est toujours réel; les deux autres peuvent être imaginaires.

Corollaire: il y a aussi en général 3 droites de l'une des figures qui coïncident avec leurs homologues dans l'autre.

Une de ces droites est toujours réelle; les deux autres peuvent être imaginaires. (Cf. mêm. sur le principe d'homographie fin.)

Dans le cas des figures semblables (ou égales) il n'y a qu'un point réel, et qu'une droite réelle, à l'infini.

Gnomonique de la Sire: Construire les lignes horaires
 cadran solaire, en connaissant sept consécutives.
 Soient X, XI, XII, I, II, III, IV les sept lignes connues.
 Par un point o de IV on mène une parallèle à X, qui coupe
 les 5 autres en a, b, c, d, e . On porte sur la transversale
 de l'autre côté de o , des longueurs $oa' = oa, ob' = ob, \dots$
 $oe' = oe$. Les lignes Oa', Ob', \dots, Oe' sont les 5 lignes
 suivantes.

(plans horaires)
 En effet, les lignes X et IV, étant perpendiculaires
 aux 2 plans horaires équidistants un faisceau harmonique
 des lignes horaires correspondantes forment aussi un faisceau
 harmonique, et déterminent sur une transversale quelconque
 une division harmonique: en partic. sur une parallèle
 elles interceptent des segments égaux: $oa = oa', \dots, oe = oe'$.

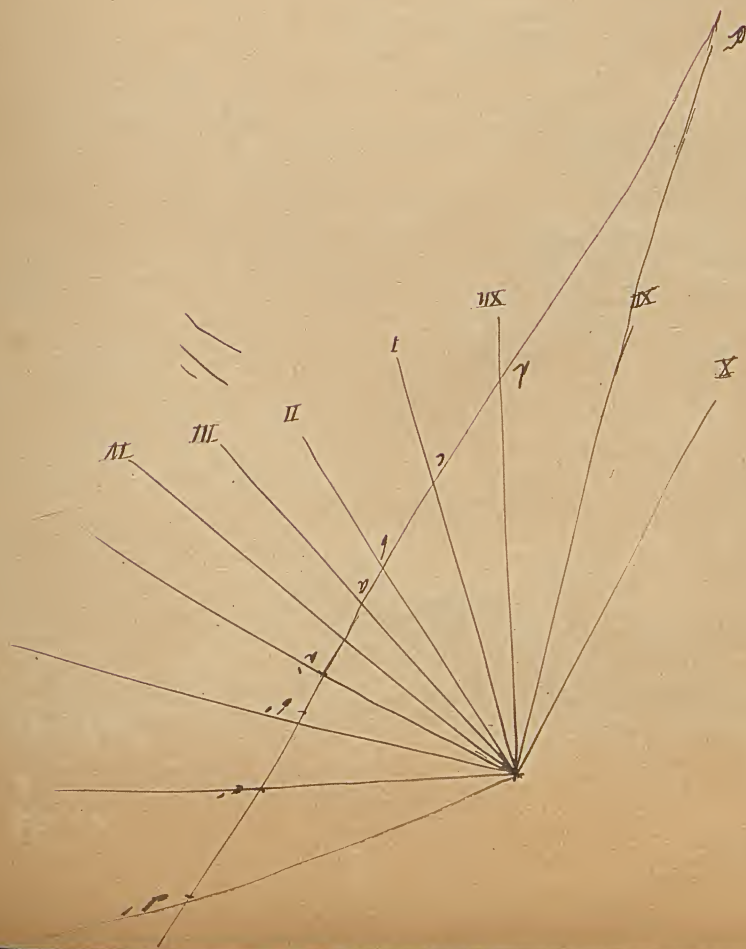
- Solution plus générale et plus simple de Charles:
 Connaissant 3 lignes horaires quelconques, on peut construire
 une 4^e ligne horaire quelconque, au moyen du rapport
 anharmonique des 4 plans horaires correspondants.
 En effet, soient A, B, C, D ces 4 plans, a, b, c, d les 4
 correspondantes (d. l. inconnue); α, β, γ les points où
 une transversale quelconque les rencontre; on a:

$$n = \frac{\sin \hat{C}A}{\sin \hat{C}B} : \frac{\sin \hat{D}A}{\sin \hat{D}B} = \frac{\sin \hat{C}a}{\sin \hat{C}b} : \frac{\sin \hat{D}a}{\sin \hat{D}b} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}$$

Pour construire graphiquement la valeur de n , il suffit
 dans un plan 4 droites OA, OB, OC, OD faisant entre elles
 mêmes angles qu'elles le plan, et de mener une transversale parallèle
 OA, qui coupe OB, OC, OD en β', γ', δ' : $n = \frac{\delta\beta}{\gamma\beta}$
 Si l'on mène une transversale parallèle à la droite a ,
 on devra avoir: $\frac{\delta\beta}{\gamma\beta} = n$, ce qui détermine le point
 (sur cette transversale)

ran
.
gpi
vri
1/2
ho
in
un
far
ulo
lit
oc
et s
est
lapp
lito
4
cu
.
l'it
ello
na
8 1/2
8 1/2
8 1/2

Charles.



$$\sqrt{6k + \frac{6}{k}} = 8\sqrt{1 + \frac{1}{3}} = 8\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$6k - 3k^2 = 0$$

$$\frac{4}{k^2} = 0$$

$$k = \frac{1}{8}$$

$$\frac{8(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}} = 4(\sqrt{3}-1)$$

$$\frac{4+8}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}$$

Sturmdum:

$$\frac{CA}{AB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{AR}{RQ} = 1$$

$$\frac{CR}{AP} \cdot \frac{AQ}{BQ} \cdot \frac{RA}{PA} = 1$$

$$\frac{CR}{RA} = \frac{CA}{AR}$$

$$\frac{AP}{AR} = \frac{AR}{OR}$$

$$\frac{PQ}{RQ} = \frac{OR}{RQ}$$

$$\frac{QC}{RC} = \frac{OR}{RA}$$

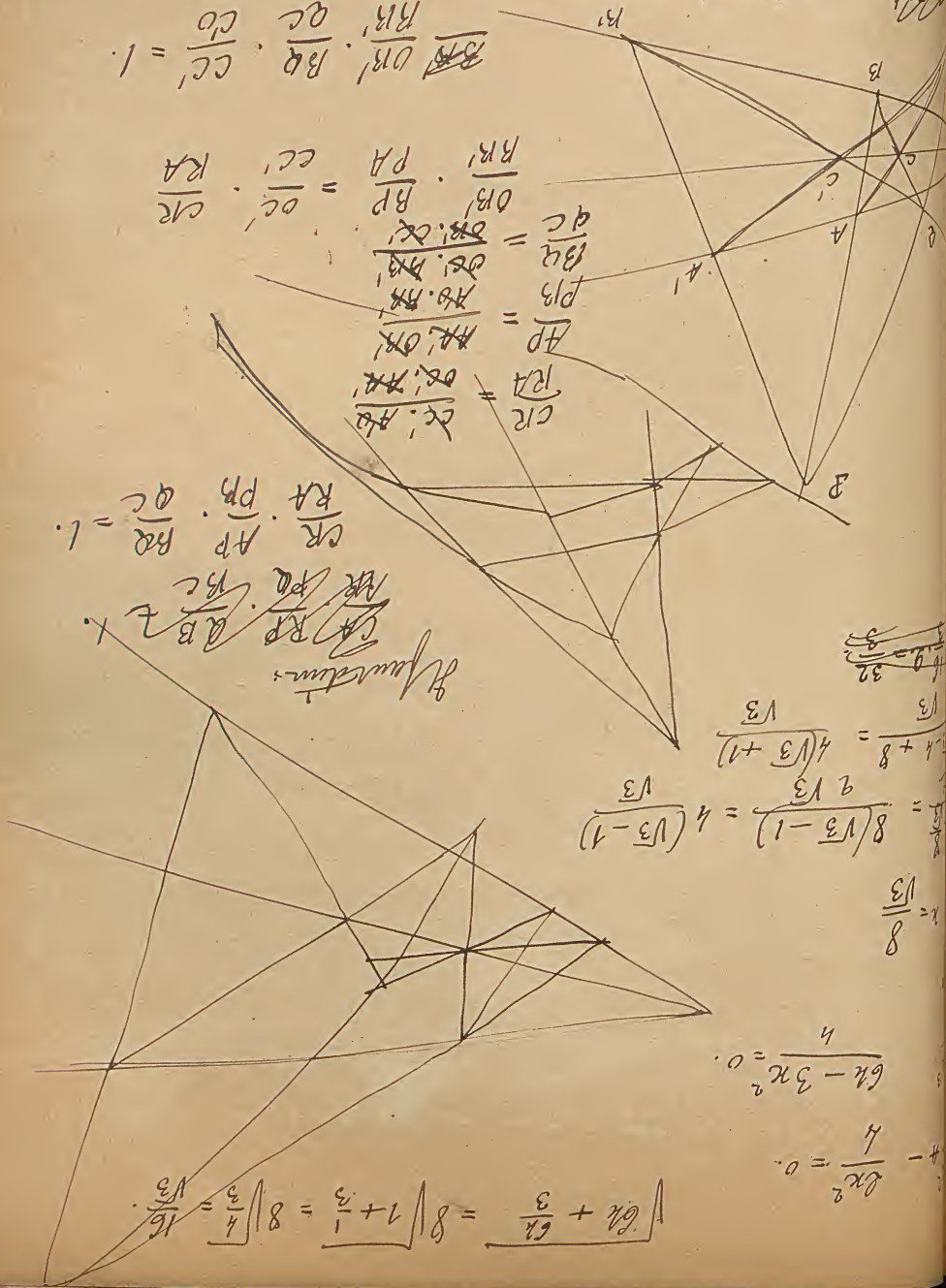
$$\frac{OR}{RA} \cdot \frac{PA}{BP} = \frac{OC}{CR}$$

$$\frac{OR}{RA} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CC'}{CQ} = 1$$

$$\frac{AA' \cdot OR}{A'Q \cdot BP} \cdot \frac{PA}{BP} = 1$$

$$\frac{BP}{PA} \cdot \frac{CC'}{CQ} = \frac{CR}{RA} \cdot \frac{RA}{OR}$$

$$\frac{BP}{PA} \cdot \frac{CC'}{CQ} = \frac{BP}{PA} \cdot \frac{CC'}{CQ} = 1$$



(présenté à l'Académie des sciences de Bruxelles en déc. 1829)
pour répondre à une question mise au concours —
Charles: Mémoire de géométrie sur deux principes
généraux de la science: la dualité et l'homographie.

Première partie: Principe de dualité.

Théorème I. Si les paramètres de l'équation d'un plan mobile
~~coordonnées~~ rapportés à 3 axes contiennent au 1^{er} degré
les coordonnées d'un point mobile, dit point directeur:

1^o Quand ce point parcourt un ~~droit~~ plan, le plan tourne autour
d'un point;

2^o Quand ce point parcourt un droit, le plan tourne autour
d'un autre droit;

3^o Quand ce point parcourt une surface d'ordre n, le plan
roule sur une surface de classe n.

- Soit: $Xx + Yy + Zz = U$ l'éq. du plan

x, y, z étant les coordonnées du point directeur;

X, Y, Z, U étant des polynômes de la forme: $ax + by + cz + d$.

Soit: $Lx + My + Nz = 1$ l'éq. du plan fixe parcouru
par le point directeur. Le plan mobile passe par le point fixe:

$$X = LU, \quad Y = MU, \quad Z = NU$$

appelé pôle du plan fixe.

Th. II. Le point où le plan mobile touche la surface
enveloppe A' est le pôle du plan tangent à la surface A
au point directeur du plan; de sorte que la surface A'
est le lieu des pôles des plans tangents à la surface A , de même
que la surface A est le lieu des pôles des plans tangents à la
surface A' (d'où réciprocité entre les 2 surfaces)
qu'il est l'enveloppe des plans ayant pour points directeurs
les points de la surface A .



Th. III. Quand le point directeur se meut à l'infini, le plan mobile tourne autour d'un point fixe, comme si le point directeur parcourait un plan.
Ce point fixe a pour coord: $X=0, Y=0, Z=0$
Ce point correspond le plan: $L=0, M=0, N=0$
dit plan de l'infini. Donc:

L'espace indéfini a pour enveloppe un plan / Pour

Th. IV. Le rapport anharmonique de 4 positions du point directeur sur une même droite est égal au rapp. anharmonique des 4 positions correspondantes du plan.

Corollaire: Sur une droite quel qu'il existe en général 2 pts tels que le plan correspondant passe par ce point.

Quand le plan mobile passe par son point directeur, ^{à chacun d'eux} ce point a pour lieu une surface du 2^e degré⁽¹⁾

Car si dans l'équation: $Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 = 0$ on fait $x=x_1, y=y_1, z=z_1$, on a une eq. du 2^e degré

Th. V. Etant donnés 5 positions du point directeur, on choisit arbitrairement les 5 positions correspondantes du plan. En général, si les 3 coefficients d'un plan ont entre eux une relation du degré m , son enveloppe sera une surface de classe m .

En effet, si dans l'équation du plan: $x_1x + y_1y + z_1z = 0$ les x_1, y_1, z_1 sont les coord. d'un point d'une surface de degré m , ce seront les coordonnées d'un point d'une surface de degré m (cf. th. I, 3°.)

(1) à moins que l'équation du plan ne devienne identiquement nulle, on y fait: $x=x_1, y=y_1, z=z_1$, auquel cas le plan enveloppant par son point directeur (cas du plan normal) la trajectoire du point

Principe de dualité :

partie. Étant donnée une figure quelconque ds l'espace, on peut former, d'une infinité de manières, une autre figure dont les points, droites et plans correspondent respectivement aux plans, droites et points de la première; les plans correspondants aux points d'une même figure passent par un même point; les plans correspondants aux ~~plans~~ ^{points} d'une même droite passent par une même droite. Les points d'une surface de ordre n ont pour correspondants les plans tangents à une surface de ordre n ; et les plans tangents à la 1^{re} ^{en ces points} ont pour correspondants les points de contact des plans tangents à la 2^e qui correspondent ^{correspondants} à l'infini dans la 1^{re} figure forment un plan, et tous les plans correspondants passent par un même point de la 2^e figure, qui correspond ^{au plan} de l'infini de la 1^{re}.
Des droites parallèles entre elles correspondent des droites situées dans un même plan passant par le point correspondant à l'infini.
Des plans parallèles correspondent des points situés sur une même droite passant par le point correspondant à l'infini.
Des plans parallèles à une même droite correspondent des points situés dans un même plan passant par le point correspondant à l'infini.

partie. Dans 2 figures corrélatives, à 2 points de la 1^{re} situés sur une même droite, correspondent ds la 2^e 2 plans passant par une même droite, et dont le rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des 2 points; et réciproquement.

Si. $\frac{\sin CA}{\sin CB} : \frac{\sin DA}{\sin DB} = \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$ on conclut: $\frac{\sin CA}{\sin CB} : \frac{ca}{cb} = C^{te}$

Soient les 3 plans A, B, C de la fig. m un point de
Soient a, b, c les 3 points correspondants, M le plan cor-
passant par c . - Le rapport des distances du point m
2 plans A et B est proportionnel au rapport des distances
points a et b en plan M .

Dans le cas particulier où le plan B est à l'infini:

La distance d'un point quel m de la fig. au plan
est proportionnelle au rapport des distances du plan
 M de la 2^e fig. aux 2 points a et i , dont le
correspond au plan A , et le 2^e au plan de l'infini.

A une courbe gauche correspond une surface d'ordre 2
A une courbe plane correspond un cône.

Si l'on transforme par le principe de dualité, la propriété
suivante des quadriques: « 2 plans tangents à une quad-
étant parallèles, la droite qui joint les 2 points de contact
passe par le centre o de la surface, et l'on a: $oa = ob$
on obtient la propriété des pôles et plans polaires:

Si par un point fixe ou même une transversale à une
les plans tangents aux 2 points de cette transversale
la surface se coupe sur un plan fixe, et la trans-
rencontre ce plan fixe au point conjugué harmonique
point fixe par rapport aux 2 points de la surface.

$$\frac{\sin OA}{\sin OB} : \frac{\sin IA}{\sin IB} = \frac{oa}{ob} : \frac{ia}{ib} = \frac{oa}{ob} = 1.$$

Le plan qui correspond de la 2^e fig. au centre de la 1^{re}
a pour pôle par rapport à la 2^e quadrique le point cor-
à l'infini de la fig. (le point i). I est le plan corrup. au p-
L'intersection de 2 plans tangents est la polaire de la droite
les 2 points de contact. (V. Mémoire sur le principe d'homog.)

Transformation des propriétés des figures homothétiques :

(5)

Quand 2 tétraèdres ont leurs sommets situés deux à deux sur 4 droites concourant en un même point i , leurs faces se coupent deux à deux suivant 4 droites contenues dans un même plan V . Le rapport des distances du point i

à 2 sommets homologues des 2 tétraèdres est proportionnel au rapport des distances de ce 2 sommets au plan V .

(Poncelet.)
C'est le principe de la théorie des figures homologues :
 i est le centre d'homologie, V le plan d'homologie.
(Voy. Mém. sur le principe d'homographie.)

Transformation du centre des moyennes distances en centre des moyennes harmoniques (par dualité) en nombre n .

Étant donnés plusieurs points a, b, c, \dots en ligne droite, il existe sur cette droite un point g tel que pour un point m quel que de la droite on ait la relation :

$$ma + mb + mc + \dots = n \cdot mg$$

ou :

$$\frac{ma}{mg} + \frac{mb}{mg} + \frac{mc}{mg} + \dots = n.$$

Dans la figure correlative, on a les plans $A, B, C, \dots G, M$ passant par une même droite, et le plan I passant par cette droite et correspondant au point à l'infini sur la droite am .

On a :

$$\frac{\sin MA}{\sin MG} : \frac{\sin IA}{\sin IG} + \frac{\sin MB}{\sin MG} : \frac{\sin IB}{\sin IG} + \dots = n$$

ou :

$$\frac{\sin MA}{\sin IA} + \frac{\sin MB}{\sin IB} + \dots = n \cdot \frac{\sin MG}{\sin IG}$$

Transversales $\alpha, \beta, \gamma, \dots \theta, \mu, \dots$:

$$\frac{\mu\alpha}{\alpha} + \frac{\mu\beta}{\beta} + \frac{\mu\gamma}{\gamma} + \dots = n \cdot \frac{\mu\theta}{\theta}$$

m et μ sont arbitraires ; envoyons μ à l'infini :

il vient : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots = \frac{n}{\delta}$

δ est la moyenne harmonique entre α, β, γ (Moyenne harmonique)
 δ est le centre des moyennes harmoniques des points $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ par rapport au point 1. (Poncelet)

Théorème : Si l'on mène une transversale quelconque à plusieurs plans A, B, C, \dots et I passant par un même point δ , le centre des moyennes harmoniques des points où elle coupe les plans A, B, C, \dots par rapport au point où elle coupe le plan I se trouve dans un plan fixe G passant par le même point δ .

- Si au lieu de mener la transversale parallèle au plan I , on la mène parallèle au plan I , on a alors :

$$\frac{\delta}{\alpha} = 1, \quad \frac{\delta}{\beta} = 1, \dots$$

$$\mu\alpha + \mu\beta + \mu\gamma + \dots = n \cdot \mu\delta$$

Le point δ est alors le centre des moyennes distances des points $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (1 étant à l'infini)

- Etant donnés plusieurs points sur une droite, et leur des moyennes distances, si l'on fait la figure corrélatrice, on aura les plans correspondants A, B, C, \dots et M ; le point où une transversale quelconque perce le plan M sera le centre des moyennes harmoniques des points où elle perce les autres plans par rapport au point où elle perce le plan qui correspond au point où elle perce la droite am .

- Etant donnés plusieurs points sur une droite ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) et leur centre des moy. harmoniques (δ) par rapp. à un point O sur la droite, si l'on fait la figure corrélatrice, on aura les plans correspondants A, B, C, \dots, G, D ; le point où une transversale quelconque perce le plan G sera le centre des moyennes harm. des points où elle perce les autres plans par rapp. à celui où elle perce le plan D .

Si par le centre des moy. distances g de plusieurs points a, b, c, \dots
on tire d'une manière quelconque dans l'espace, ~~ou même des~~
des moy. dist. g ou même de plans parallèles, une transversale
quelque rencontre les premiers en des points dont le centre des
moyennes distances se trouve sur le dernier.

Propriété corrélatrice du ^{plan} centre des moy. harmoniques :
Soient plusieurs plans situés d'une manière quelconque dans l'espace,
ou leur même par un point fixe une transversale quelconque,
le centre des moy. harmoniques des points où elle perce ces
plans se trouve dans un plan fixe.

Ce plan est le plan des moyennes harmoniques des plans
donnés par rapport au point fixe. (Poncelet.)

Transformation de cette propriété par le principe de dualité :
Étant donné un système de points a, b, c, \dots de l'espace,
et un plan I ; si par un droite quelconque de ce plan on mène
des plans passant par tous ces points, qu'on mène une trans-
versale quelconque et qu'on prenne le centre du moy. harmoniques
des points où elle perce en plan par rapp. à celui où elle
perce le plan I , le plan mené par ce centre et par la
droite du plan I passe par un point fixe.

Ce point est le centre des moyennes harmoniques des
points donnés par rapport au plan I . (Poncelet.)

Si le plan I est à l'infini, le point fixe sera le centre des
moyennes distances des points donnés.

Double génération de l'hyperboloïde à une nappe.
 Étant donné un quadrilatère gauche $aa'b'b$, si l'on mène
 une droite mobile mm' qui divise les côtés opposés
 $ab, a'b'$ proportionnellement $\frac{ma}{mb} = \frac{m'a'}{m'b'}$
 La droite mm' sera dans un plan parallèle à aa' ,
 et elle s'appuiera constamment sur toute droite non
 rencontrée les côtés aa', bb' et se trouve dans un plan parallèle à

Propriété Corrélatrice :

Étant donnés 3 plans A, B, I passant par une même
 et 3 autres plans A', B', I' passant par une seconde
 Si autour de ces 2 droites on fait tourner 2 plans M, M'
 de manière que le rapport anharmonique des 4 plans A, B, I, M
 soit égal au rapport anharmonique des 4 plans A', B', I', M'
 la droite d'intersection des 2 plans M, M' s'appuiera constamment
 sur toute transversale qui rencontre les 3 droites d'intersection
 des plans A et A', B et B', I et I' .

(Propriété analogue à la propriété anharmonique des points
 d'une conique.)

Déclaration :

$$\frac{\sin MA}{\sin MB} : \frac{\sin M'A'}{\sin M'B'} = \frac{\sin IA}{\sin IB} : \frac{\sin I'A'}{\sin I'B'}$$

on conclut :

Le lieu d'un point dont le rapport des distances à
 deux plans A et B est proportionnel au rapport de ses distances
 à deux autres plans A', B' , est un hyperboloïde à une

9

Passage des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles.

Soit: $F(x, y, z) = 0$ l'éq. d'une surface d'ordre n en coordonnées cartésiennes.

La figure correlative sera une surface de classe n .
Aux 3 axes ox, oy, oz correspondent 3 droites dans un plan O : Soit ABC le triangle formé par ces droites, dont les sommets correspondent aux 3 plans yz, zx & xy .

Aux 3 plans menés par un point m de la surface parallèles aux 3 plans coordonnés, correspondent les 3 points ξ, η, ζ où le plan tangent ~~en~~ M à la surface coupe les 3 droites iA, iB, iC , i étant le point correspondant à l'infini de la figure. Aux points x, y, z correspondent les plans X, Y, Z menés par les 3 côtés du triangle ABC et par les 3 points ξ, η, ζ respectivement opposés à ces côtés.

Soient 3 points fixes d, e, f sur les 3 axes ox, oy, oz ; Soient D, E, F les 3 plans fixes correspondants, passant par les 3 côtés du triangle ABC . Les plans iBC, iCA, iAB correspondent aux 3 points à l'infini sur ox, oy, oz : On a:

$$\frac{ox}{od} = \frac{\sin O, X}{\sin O, D} : \frac{\sin iBC, X}{\sin iBC, D} = \frac{A\xi}{Ad} : \frac{i\xi}{i\delta} = \frac{A\xi}{i\xi} : \frac{Ad}{i\delta}$$

$$\frac{oy}{oe} = \frac{\sin O, Y}{\sin O, E} : \frac{\sin iCA, Y}{\sin iCA, E} = \frac{B\eta}{Be} : \frac{i\eta}{i\epsilon} = \frac{B\eta}{i\eta} : \frac{Be}{i\epsilon}$$

$$\frac{oz}{of} = \frac{\sin O, Z}{\sin O, F} : \frac{\sin iAB, Z}{\sin iAB, F} = \frac{C\zeta}{Cf} : \frac{i\zeta}{i\varphi} = \frac{C\zeta}{i\zeta} : \frac{Cf}{i\varphi}$$

$\delta, \epsilon, \varphi$ étant les points où les plans D, E, F rencontrent respectivement les axes iA, iB, iC .

En substituant dans l'équation de la surface, on aura l'équation de degré n en les rapports variables $\frac{A\xi}{i\xi}, \frac{B\eta}{i\eta}, \frac{Cz}{i\zeta}$ joueront le rôle de coordonnées homogènes du plan tangent à la surface de classe n .

Si le point i est à l'infini, on a simplement:

$$F(A\xi, B\eta, Cz) = 0$$

Les 3 axes Ai, Bi, Ci sont parallèles entre eux.

Si au contraire, le point i étant à distance finie, les points A, B, C sont à l'infini (le tétraèdre se réduit à un triangle ABC) on a: $F\left(\frac{1}{i\xi}, \frac{1}{i\eta}, \frac{1}{i\zeta}\right) = 0$

Considérons le plan qui passe par les 3 points ξ, η, ζ

soient p, p', p'', p''' ses distances aux 4 sommets

du tétraèdre; on a: $\frac{A\xi}{i\xi} = \frac{p'}{p}, \frac{B\eta}{i\eta} = \frac{p''}{p}, \frac{Cz}{i\zeta} = \frac{p'''}{p}$

L'équation tangentielle de la surface sera alors:

$$F\left(\frac{p'}{p}, \frac{p''}{p}, \frac{p'''}{p}\right) = 0$$

équation homogène de degré n entre p, p', p'', p''' .

Nouveau système de géométrie analytique

Soit: $F(\xi, \eta, \zeta)$ l'éq. tangentielle de la surface.

ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées d'un de ses plans tangents.

L'équation du point de contact sera:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}(\xi - \xi_1) + \frac{\partial F}{\partial \eta_1}(\eta - \eta_1) + \frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\zeta - \zeta_1) = 0$$

Pour avoir l'intersection de la surface par un plan on prendra l'équation de condition suivante:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}(\alpha - \xi_1) + \frac{\partial F}{\partial \eta_1}(\beta - \eta_1) + \frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\gamma - \zeta_1) = 0$$

Cette eq. jointe à celle de la surface, représente la développée

circulaire à la surface suivant son intersection avec le plan $(\alpha\beta\gamma)$
 Dans deux figures corrélatives, à un même point de l'espace, considéré successivement comme appartenant à l'une et à l'autre, correspondent en général deux plans différents.

Théorème Soit donné une figure dans l'espace, et deux tétraèdres quelconques A, B, C, D étant la face du premier, et a, b, c, d les sommets du second; si à chaque point m de la figure, dont les distances aux 4 plans A, B, C, D sont z, z', z'', z''' on fait correspondre un plan M dont les distances $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$ aux 4 sommets a, b, c, d vérifient les relations :

$$\frac{\rho'}{\rho} = \lambda \frac{z'}{z}, \quad \frac{\rho''}{\rho} = \mu \frac{z''}{z}, \quad \frac{\rho'''}{\rho} = \nu \frac{z'''}{z},$$

(constantes)

le plan M enveloppera une figure corrélatrice de la proposée.

Corollaire Soient 2 tétraèdres $SABC, SA'B'C'$. Si par chaque point d'un plan quelconque fixe ou même 3 plans passant par les 3 côtés du triangle ABC , qui coupent les arêtes opposées aux points α, β, γ ; puis qu'on mène un plan qui coupe les 3 arêtes $S'A', S'B', S'C'$ du second tétraèdre en 3 points α', β', γ' tels qu'on ait :

$$\frac{\alpha'A'}{\alpha'S'} = \lambda \frac{\alpha S}{\alpha A}, \quad \frac{\beta'B'}{\beta'S'} = \mu \frac{\beta S}{\beta B}, \quad \frac{\gamma'C'}{\gamma'S'} = \nu \frac{\gamma S}{\gamma C}$$

le plan déterminé par les 3 points α', β', γ' passera toujours par un point fixe (correspondant au plan fixe donné).
 De cette proposition, qui est ici un corollaire du principe de dualité, on pourrait déduire toute la théorie des figures corrélatives et le principe de dualité lui-même.

Si la face (base) ABC du tétraèdre est à l'infini, on

$$\alpha S = \lambda \frac{\alpha' A'}{\alpha' S'} \quad \beta S = \mu \frac{\beta' B'}{\beta' S'} \quad \gamma S = \nu \frac{\gamma' C'}{\gamma' S'}$$

Si le sommet S' du tétraèdre est aussi à l'infini, on

$$\alpha S = \lambda \alpha' A' \quad \beta S = \mu \beta' B' \quad \gamma S = \nu \gamma' C'$$

Transformation particulière, dans laquelle le point correspondant à l'infini est lui-même à l'infini: c'est ce qui a lieu dans la transformation parabolique, dans la transformation par mouvement infiniment petit, ou par un système de

Si les 2 bases $ABC, A'B'C'$ sont à l'infini, il vient

$$\alpha S = \frac{\lambda}{\alpha' S'} \quad , \quad \beta S = \frac{\mu}{\beta' S'} \quad , \quad \gamma S = \frac{\nu}{\gamma' S'}$$

Si les 2 sommets S et S' sont à l'infini, il vient

$$\alpha A = \frac{\lambda}{\alpha' A'} \quad , \quad \beta B = \frac{\mu}{\beta' B'} \quad , \quad \gamma C = \frac{\nu}{\gamma' C'}$$

Théorie des polaires réciproques.

Si l'on circonscrit à une surface du 2^e degré un cône ayant pour sommet un point donné (x_1, y_1, z_1) le plan de la courbe de contact, dont l'équation contient x_1, y_1, z_1 au 1^{er} degré, enveloppe une figure correlative de celle qui décrit le sommet du cône circonscrit.

Si le sommet du cône prend les positions a, b, c, d en ligne droite, le plan de contact prendra les positions A, B, C, D , telles qu'on aura toujours:

$$\frac{\sin CA}{\sin CB} : \frac{\sin DA}{\sin DB} = \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}.$$

Le sommet du cône est le pôle du plan, qui est appelé le plan polaire du sommet.

Quand le plan polaire d'un point passe par un 2^e point, réciproquement le plan polaire de ce 2^e point passe par le 1^{er}.
D'où réciprocité de la transformation, et le nom de figures polaires réciproques.

La relation anharmonique représente toutes les relations transformables par les polaires réciproques; elle résume toutes les relations projectives.

Théorème

Transformation par mouvement infiniment petit
 Quand un corps solide éprouve un déplacement infinitésimal, les plans normaux aux trajectoires de tous ses points enveloppent une figure corrélatrice de la figure de ce corps.
 Caractère particulier de cette transformation : chaque plan passe par le point correspondant (point directeur).
 De plus, il existe un axe X qui se déplace de sa direction.
 Les plans normaux aux trajectoires de 2 points quelconques rencontrent cet axe en 2 points α, β qui sont les pieds des perpendiculaires abaissées des points a, b sur l'axe X de sorte qu'on a : $\alpha\beta = ab \cdot \cos(ab, X)$

Telle est la relation métrique entre les 2 figures corrélatrices.
 — Soient dans l'espace 2 figures égales situées l'une vis-à-vis l'autre quelconques; si l'on joint par des droites les points homologues des 2 figures, et qu'on mène par le milieu de chaque droite le plan normal à cette droite, tous ces plans enveloppent une figure corrélatrice des 2 proposées, et corrélatrice figure formée par les milieux de toutes ces droites.

(1) Corollaire : Si l'on coupe la surface d'une vis par une droite et que par chaque point de la section on mène le plan normal à la droite qui passe par ce point, tous ces plans normaux passent par un même point, situé dans le plan sécant.

Transformation par la considération d'un système de forces.
 Un système de forces équivalent à 2 forces F, F' ; si l'on se donne la direction de l'une, on la détermine entièrement toutes les deux.
 Si l'on prend le plan du moment principal des forces par rapport à un point de F , et passera par F' . Si l'on fait tourner F autour de ce point fixe, F' reste dans le plan du moment principal relatif à ce point. (Où dualité ^{fixe})
 (et réciproquement)

Si l'on conçoit dans l'espace un système de forces, et qu'on prenne les plans des moments principaux relatifs à tous les points d'une figure, ces plans envelopperont une figure corrélatrice.
 Le segment intercepté sur l'axe central des moments par deux plans quelconques de l'une des figures est égal à la projection orthogonale sur cet axe de la droite qui joint les 2 points correspondants de l'autre figure.

C'est la relation métrique entre les 2 figures corrélatrices.

Les 3 modes de transformation précédents jouissent de la propriété de réciprocity.

Condition pour qu'il y ait réciprocité entre deux figures corrélatives:-

- Théorème: Quand l'équation d'un plan mobile est au 1^{er} degré les coordonnées x, y, z d'un point directeur selon échange les coordonnées courantes x, y, z en coordonnées x_1, y_1, z_1 , on obtient un second plan mobile correspondant au même point directeur. Si le point directeur parcourt la surface A , le 1^{er} plan mobile enveloppe la surface A et si le point directeur parcourt la surface A' , le 2^e plan enveloppe la surface A .

Pour qu'il y ait réciprocité, il faut et il suffit que les deux équations se confondent, c'est-à-dire que l'équation du plan mobile ne change pas quand on y échange x, y, z en x_1, y_1, z_1 .

Il faut et il suffit que l'équation du plan mobile soit symétrique par rapport aux coordonnées courantes à celles du point directeur.

Quand l'équation d'un plan mobile est symétrique par rapport aux coordonnées courantes à celles du point directeur elle ne peut avoir que deux formes différentes: ou bien le plan mobile peut être considéré comme le plan polaire du point directeur par rapport à une surface déterminée du 2^e degré ou bien il peut être considéré comme le plan normal à la trajectoire du point directeur dans un mouvement quelconque de la figure à laquelle ce point appartient.

Seconde partie: Principe de homographie.

1^{re} partie: Une figure quelconque étant donnée dans l'espace, on peut former, d'une infinité de manières, une seconde figure du même genre jouissant des mêmes propriétés descriptives que la première, c'est-à-dire qu'à chaque point, droite ou plan de la première correspond, dans la seconde, un point, une droite ou un plan.

Aux points à l'infini de la 1^{re} figure correspond un plan, d'où qu'il y a des faisceaux de droites parallèles, de la 1^{re} figure, correspondront des faisceaux de droites concourant en ce plan.

2^e partie: Le rapport anharmonique de 4 points de la 1^{re} figure est égal au rapport anharmonique des 4 points homologues de la 2^e figure; et le rapport anharmonique de 4 plans passant par une même droite de la 1^{re} figure est égal au rapport anharmonique des 4 plans homologues de la 2^e fig.

Pour démontrer ce principe, il suffit de concevoir une figure A' correlative de la proposée A , en vertu du principe de dualité; puis une figure A'' correlative de la figure A' . Les deux figures A et A'' seront homographiques.

Dans deux figures homographiques, le rapport des distances d'un point quelconque de la 1^{re} à 2 points fixes est proportionnel au rapport des distances du plan homologue aux 2 points fixes qui correspondent à ceux de la 1^{re} figure. (de la 2^e figure)

Et le rapport des distances d'un point quelconque de la 1^{re} à 2 plans fixes est proportionnel au rapport des distances du point homologue aux 2 plans fixes homologues.

Dans deux figures homographiques, la distance d'un point quelconque de la 1^e à un plan fixe est proportionnelle au rapport des distances du point homologue au plan homologue du plan fixe et au plan homologue de la 2^e.

La distance d'un point quelconque de la 1^e fig. au plan homologue de l'infini de la 2^e, est en raison inverse de la distance du point homologue de la 2^e fig. au plan homologue de l'infini de la 1^e.

Deux figures sont homographiques, dès qu'à tout point et à chaque plan de l'une correspondent respectivement un point et un plan de l'autre : et la relation subsiste immédiatement de cette propriété.

On peut faire correspondre d'une infinité de manières des points d'une figure aux points d'une autre; mais si elles sont homographiques, et sans de plus qu'un point d'un même plan correspondent les points d'un même plan.

Pôles et plans polaires dans les surfaces du second degré.
 Si l'on transforme par homographie la figure formée par une
 quadrique à centre C , un diamètre AB et les 2 plans tangents
 aux points A et B , on obtient la propriété suivante. (Parallèles)

Si autour d'un point fixe on fait tourner une transversale
 ou même les 2 plans tangents à la quadrique aux points
 où cette transversale la perce, 1° ces deux plans se couperont
 sur un plan fixe; 2° le point où ce plan fixe rencontrera
 la transversale sera le conjugué harmonique du point fixe
 par rapport aux 2 points où la transversale perc la surface.

$$\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{CA}{CB} = 1$$

Le plan fixe est l'homologue de l'infini de la figure; et il
 s'appelle plan polaire du point fixe C , qui est l'homologue
 du point à l'infini du diamètre AB ; et ce point s'appelle
 pôle du plan fixe. (Le point D est l'homologue du point à l'infini
 sur AB .)

La relation harmonique étant réciproque, le plan polaire
 d'un point quelconque d'un plan passe par le pôle de ce plan.
 D'où réciproque entre les pôles et plans polaires, et entre
 les droites polaires. Tout diamètre de la surface a sa polaire
 à l'infini.

Soient 3 diamètres conjugués d'une quadrique Σ : la polaire
 de chacun d'eux est à l'infini dans le plan des 2 autres. A
 ces diamètres correspondent dans la quadrique homographique Σ'
 3 cordes passant par le point C' homologue du centre C de Σ ;
 la polaire de chacune d'elles sera dans le plan des 2 autres, et
 sur le plan polaire de C' . Ces 3 droites sont donc toutes qui
 la polaire de chacune d'elles passe par le point de concours des 2
 autres. Elles forment un système de droites conjuguées relatif au point C' .

On peut aussi obtenir les axes conjugués relatifs à un p.
par le principe de dualité.

Considérons 3 diamètres conjugués d'un quadrique.
Les plans tangents aux extrémités de chacun d'eux sont
parallèles au plan des 2 autres. Transformons par dualité
au centre O correspond au plan O , dont le pôle par rapport
à la surface transformée Σ' est le point i correspondant
à l'origine de la 1^{re} fig. Aux 3 diamètres conjugués correspond
3 droites du plan O , et telles, que la polaire de chacune
passe par le point d'intersection des 2 autres (les 3 polaires
concourent ^{en i.} en i .) Aux extrémités des 3 diamètres conjugués
correspondent les plans tangents menés par les 3 droites
pendantes, et les points de contact de ces plans tangents cor-
respondent aux plans tangents menés à Σ' par les extrémités
des diamètres conjugués. Les 3 droites ^{des plans} concourant au point
forment un système d'axes conjugués relatif à ce point.

Propriété générale des axes conjugués, obtenue par le principe de dualité.

Soit une segment ^{fixe} om ; ox_1, oy_1, oz_1 ses projections sur 3 axes rectangulaires ox, oy, oz (mobiles autour de O .)

$$ox_1^2 + oy_1^2 + oz_1^2 = om^2 = Cte.$$

Soit une sphère de centre O , coupant les 3 axes en a, b, c , on peut écrire:

$$\frac{ox_1^2}{oa^2} + \frac{oy_1^2}{ob^2} + \frac{oz_1^2}{oc^2} = Cte.$$

Transformons la figure par dualité. On aura une surface du 2^e degré; 3 droites X, Y, Z dans un plan O , telles que la polaire de chacune d'elles passe par le point de rencontre des 2 autres. Ces 3 polaires X', Y', Z' convergent au point i correspondant à l'infini: ce sont 3 axes conjugués relatifs à ce point. On aura dans le plan O une 4^e droite correspondante à om ; un plan q quelconque passant par cette droite correspondra au point m . Sur 3 plans menés par m parallèles aux axes ox, oy, oz correspondent les 3 points où le plan M coupe les 3 axes conjugués X', Y', Z' : Soient x, y, z ces 3 points.

Aux points o, x, a , à l'infini sur l'axe ox correspondent le plan passant par X : le plan O , le plan du point x , le plan tangent à la surface et le plan du point i . On a donc la relation anharmonique:

$$\frac{ox_1}{oa_1} = \frac{\alpha x}{\alpha a} : \frac{ix}{ia} \quad \frac{oy_1}{ob_1} = \frac{\beta y}{\beta b} : \frac{iy}{ib} \quad \frac{oz_1}{oc_1} = \frac{\gamma z}{\gamma c} : \frac{iz}{ic}$$

D'un théorème: Soient donnés un quadrique et un plan transversal ^{MM}, si autour d'un point quelconque on fait tourner 3 axes conjugués, et qu'on désigne par α, β, γ les points où ils rencontrent le plan polaire de i ; a, b, c , 3 des six points où ils rencontrent la surface; x, y, z les 3 points où ils rencontrent le plan transversal, on aura la relation:

$$\left(\frac{ia}{\alpha a} : \frac{ix}{\alpha x}\right)^2 + \left(\frac{ib}{\beta b} : \frac{iy}{\beta y}\right)^2 + \left(\frac{ic}{\gamma c} : \frac{iz}{\gamma z}\right)^2 = Cte$$

Si le plan transversal M est parallèle au plan polaire (0)
on a: $\frac{ix}{\alpha x} = \frac{iy}{\beta y} = \frac{iz}{\gamma z} = Cte$

d'où: $\left(\frac{ia}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{ib}{\beta b}\right)^2 + \left(\frac{ic}{\gamma c}\right)^2 = Cte$

Si le plan O est à l'infini, c'est-à-dire si le point i est le centre de la quadrique, les 3 axes conjugués ia, ib, ic deviennent 3 diamètres conjugués. On a:

$$\frac{\alpha x}{\alpha a} = \frac{\beta y}{\beta b} = \frac{\gamma z}{\gamma c} = 1 \quad ; \quad \text{d'où:}$$

$$\left(\frac{ix}{ia}\right)^2 + \left(\frac{iy}{ib}\right)^2 + \left(\frac{iz}{ic}\right)^2 = Cte$$

Démonstration directe de la relation anharmonique entre
pôles en ligne droite et leurs plans polaires:

$$\frac{\sin CA}{\sin CB} : \frac{\sin DA}{\sin DB} = \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les points où la droite $abcd$ rencontre
le plan A, B, C, D . Il suffit de prouver: $\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta} =$

Or le point a étant le pôle du plan A ,
les points a et α sont conjugués harmoniques par rapport
aux 2 points où la droite $abcd$ rencontre la quadrique
de même b et β, c et γ, d et δ sont conjugués harmoniques
par rapport aux 2 mêmes points. Ces septénaires de points
donc en involution, et le rapport anharmonique
est égal au rapport anharmonique des 4 points correspondants.

Corollaire: Étant donnés 2 points fixes a, b , et leurs plans
polaires A, B par rapp. à une quadrique, si l'on mène un plan
et qu'on prenne son pôle m , le rapport des distances du plan
points a et b est prop. au rapp. des distances du point m aux

Propriété générale d'un système de axes conjugués, obtenue par le principe de l'homographie.

Considérons 2 diamètres conjugués d'une quadrique, AA', BB', CC' , et un point fixe O quelconque: on sait qu'on a, quelque soit le système de diam. conjugués:

$$OA^2 + OA'^2 + OB^2 + OB'^2 + OC^2 + OC'^2 = C^2$$

Concevons une sphère de centre O ; Soient a, a', b, b', c, c' les points où elle coupe les 6 demi-droites issues de ce point; on peut écrire:

$$\left(\frac{OA}{Oa}\right)^2 + \left(\frac{OA'}{Oa'}\right)^2 + \left(\frac{OB}{Ob}\right)^2 + \left(\frac{OB'}{Ob'}\right)^2 + \left(\frac{OC}{Oc}\right)^2 + \left(\frac{OC'}{Oc'}\right)^2 = C^2.$$

Faisons la figure homographique, en conservant les mêmes lettres. Soient I, I', M, M', N, N' les points où les 6 droites issues de O percent le plan qui correspond à l'infini de la 1^{re} fig; ce plan a pour pôle le point homolog. du centre de la 1^{re} quadrique, par rapp. aux nouvelles quadriques; ce point homolog. du point O de la sphère primitive.

D'où le théorème suivant: $\left[\frac{OA}{Oa} \text{ devient: } \frac{OA}{Oa} \cdot \frac{I.A.}{I.a} \right]$

Étant données 2 quadriques fixes et un plan fixe; si par le pôle de ce plan par rapport à la 1^{re} surface on mène un système de axes conjugués, AA', BB', CC' ; et si par le pôle de ce plan par rapport à la 2^e surface on mène 6 rayons aux points A, A', B, B', C, C' , qui rencontrent cette 2^e surface aux points a, a', b, b', c, c' , et le plan fixe aux points I, I', M, M', N, N' ; on aura la relation:

$$\left(\frac{OA}{Oa} \cdot \frac{I.A.}{I.a}\right)^2 + \left(\frac{OA'}{Oa'} \cdot \frac{I.A'}{I.a'}\right)^2 + \dots + \left(\frac{OC}{Oc} \cdot \frac{N.C.}{N.c}\right)^2 + \left(\frac{OC'}{Oc'} \cdot \frac{N.C'}{N.c'}\right)^2 = C^2$$

Transformation du centre des moyennes distances en centre des moyennes harmoniques (par homographie.)

Étant donné n points ^{sur une} en ligne droite, g leur centre des moyennes distances, m un point quelconque de la droite, on a :

$$ma + mb + mc + \dots = n \cdot mg$$

$$\text{ou} \quad \frac{ma}{mg} + \frac{mb}{mg} + \frac{mc}{mg} + \dots = n$$

Dans la figure homographique, soient a', b', c', \dots, g' , m' les points correspondants, et i' le point correspondant à l'infini sur la droite $abc \dots$. On a : $\frac{ma}{mg} = \frac{m'a'}{m'g'} : \frac{i'a'}{i'g'}$ etc.

$$\text{D'où : } \frac{m'a'}{i'a'} + \frac{m'b'}{i'b'} + \frac{m'c'}{i'c'} + \dots = n \cdot \frac{m'g'}{i'g'}$$

Le point m' est arbitraire comme m . Si m' est à l'infini :

$$\frac{1}{i'a'} + \frac{1}{i'b'} + \frac{1}{i'c'} + \dots = \frac{n}{i'g'}$$

Le point g' est le centre des moyennes harmoniques de a', b', c', \dots par rapport au point i' .

À l'inverse, si i' est à l'infini, il vient :

$$m'a' + m'b' + m'c' + \dots = n \cdot m'g'$$

Le point g' est le centre des moyennes distances du p. a', b', c', \dots

Si m' vient coïncider avec g' (dans le cas général) on a :

$$\frac{g'a'}{i'a'} + \frac{g'b'}{i'b'} + \frac{g'c'}{i'c'} + \dots = 0$$

propriété qui caractérise le centre des moy. harmoniques g' .

Si l'on transforme par homographie un système de points d'un plan et leur centre des moyennes distances (tel qu'un même des parallèles par ces points et leur centre, un trait quel que rencontre les premières en des points double des moy. dist. se trouve sur la dernière) on obtient un système de points dans un plan et leur centre des moyennes harmoniques par rapport à une droite fixe (qui correspond à l'infini du premier plan)

Propriété du centre des moyennes harmoniques d'un système de points d'un plan et leur centre des moyennes distances. Etant donné dans un plan un système de points et une droite fixe, si par un point quel que de cette droite ou même des points à tous ces points, et un dernier rayon au centre des moyennes distances, les autres rayons rencontrent une transversale relative au point où cette transversale rencontre la droite fixe, ce dernier rayon passe par un point fixe, qui est le centre des moyennes harmoniques des points donnés par rapport à la droite fixe.

Si l'on transforme par homographie un système de points d'un plan et leur centre des moyennes distances, on obtient un système de points et leur centre des moyennes harmoniques par rapport à un plan fixe (qui correspond à l'infini du premier plan).

- Propriétés du centre des moyennes harmoniques d'un système de points d'un plan et leur centre des moyennes distances.
- Etant donné un plan et un système de points dans ce plan, si par un point quel que de ce plan ou même des points à tous ces points, et un dernier rayon au centre des moyennes distances, les autres rayons rencontrent un plan transversal quel que, relatif à la droite d'intersection de ce plan transversal avec le plan fixe, ce dernier rayon passe par un point fixe, qui est le centre des moyennes harmoniques des points donnés par rapport au plan fixe.
- 2° Si l'on fixe une droite quel que de ce plan ou même des plans par rapport à un plan fixe, et si l'on prend le centre des moyennes harmoniques des points d'un système de points d'un plan et leur centre des moyennes distances, on obtient un système de points et leur centre des moyennes harmoniques par rapport à une droite fixe (qui correspond à l'infini du premier plan).

elle rencontre le plan donné; le plan mené par la droite et par ce centre passera par le centre des moy. harm. des points donnés par rapport au plan donné.

Le centre des moyennes distances d'un système de points dans l'espace est tel, que sa distance à un plan quelcun est la moyenne des distances de tous les points au même plan.

Transformons cette propriété par homographie: Théorème: Le centre des moyennes harmoniques d'un système de points dans l'espace par rapport à un plan donné est tel, que la somme des distances de tous ces points à un plan transversal quelcun, divisées respectivement par leurs distances au plan donné, est égale à n fois la distance des centres au plan transversal, divisée par la distance au plan donné.

Soit Π le plan transversal, I le plan donné (correspondant à l'infini de la 1^{re} fig.) on a a, b, c, \dots points donnés; g leur centre:

$$\frac{a\pi}{a_i} + \frac{b\pi}{b_i} + \frac{c\pi}{c_i} + \dots = n \cdot \frac{g\pi}{g_i}$$

Le centre des moyennes harmoniques d'un système de points par rapport à un plan donné est le centre de gravité de ces points, supposés matériels et dotés de masses inversement proportionnelles à leurs distances au plan donné.

Le centre des moyennes harmoniques devient ainsi un cas particulier du centre de gravité, c.à.d. du centre des moyennes distances.

Le centre des moyennes harmoniques d'un système de points par rapport à un plan donné est encore le centre du forces parallèles appliqués en ces points et inversement proportionnelles à leurs distances au plan donné (Cauchy.)

Si le plan transversal Π est à l'infini, on a simplement:

$$\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i} + \frac{1}{c_i} + \dots = \frac{n}{g_i} \quad (\text{par rapp au plan fixe } I.)$$

Corollaire / en supprimant le plan à l'intersection Π parallèle au plan
Si d'un point quelconque de l'espace on mène des rayons à
points et à leur centre des moy, harmoniques par rapport
plan fixe, et qu'on prenne le rapport de chaque rayon au
compris entre le point auquel ce rayon aboutit et celui
sur le plan fixe; le rapport relatif au centre des moy,
sera la moyenne de tous les autres rapports.
arithmétique

Généralisation du système des coordonnées cartésiennes.

L'équation d'une surface d'ordre n en coord. cartésiennes

est: $F(x, y, z) = 0$ F du degré n .

La figure homographique est une surface d'ordre n .

Aux 3 axes ox, oy, oz correspondent 3 axes OX, OY, OZ :

au plan de l'infini correspond un plan, qui rencontre les 3 axes en A, B, C : en 3 points correspondant aux points à l'infini sur ox, oy, oz . Prenons 3 points fixes d, e, f respectivement sur ox, oy, oz ; soient D, E, F les points correspondants sur OX, OY, OZ .

On a: $\frac{ox}{od} = \frac{OX}{OD} : \frac{AX}{AD} = \frac{OX}{AX} : \frac{OD}{AD}$

$\frac{oy}{oe} = \frac{OY}{OE} : \frac{BY}{BE} = \frac{OY}{BY} : \frac{OE}{BE}$

$\frac{oz}{of} = \frac{OZ}{OF} : \frac{CZ}{CF} = \frac{OZ}{CZ} : \frac{OF}{CF}$

L'équation de la surface homographique sera:

$F\left(\frac{OX}{AX} : \frac{OD}{AD}, \frac{OY}{BY} : \frac{OE}{BE}, \frac{OZ}{CZ} : \frac{OF}{CF}\right) = 0$

ou simplement:

$F\left(\frac{OX}{AX}, \frac{OY}{BY}, \frac{OZ}{CZ}\right) = 0$

les rapports $\frac{OD}{AD}, \frac{OE}{BE}, \frac{OF}{CF}$ étant des constantes qui rentrent dans les coefficients.

C'est l'équation de la surface en coordonnées projectives homogènes.

Sur le point O, X, A, D sur l'axe OX on peut substituer

les points où une transversale quelconque rencontre les 3 plans

OBC, XBC, ABC, DBC , soient α, X', A', D' ; de même on

peut remplacer les axes OY et OZ par les transversales quelconques

$\beta Y' B' E', \gamma Z' C' F'$; l'équation de la surface d'ordre n sera:

$F\left(\frac{\alpha X'}{A'X'}, \frac{\beta Y'}{B'Y'}, \frac{\gamma Z'}{C'Z'}\right) = 0$

très générale:

La surface est rapportée au triangle ABC et à 3 axes quelconques $\alpha A', \beta B', \gamma C'$.

Si les points A', B', C' sont à l'infini, l'équation devient

$$F(\alpha X', \beta Y', \gamma Z') = 0$$

eq. de la surface rapportée à un triangle ABC et à 3 axes parallèles $\alpha X, \beta Y, \gamma Z$ (parallèles au plan du triangle)

Si les points α, β, γ sont à l'infini, l'équation devient

$$F\left(\frac{1}{A'X'}, \frac{1}{B'Y'}, \frac{1}{C'Z'}\right) = 0$$

eq. d'une surface rapportée à un triangle ABC et à 3 axes quelconques passant par 3 points quelconques A', B', C' du plan de ABC

Si le triangle ABC est à l'infini, l'équation devient

$$F(\alpha X', \beta Y', \gamma Z') = 0$$

eq. d'une surface dont chaque point est projeté sur 3 plans fixes quelconques parallèlement à 3 plans fixes quelconques

Particulier: Si l'on suppose que les 3 axes sont issus d'un même point et que les 3 plans sont les 3 plans déterminés par ces axes 2 à 2, on retrouve les coordonnées rectilignes

On peut confondre 2 ou 3 axes, et 2 ou 3 origines d'axe multiple.

On peut aussi confondre les points A', B', C' , les 3 axes distincts. Le trièdre des axes a son sommet d's le plan de ABC .

On peut enfin, dans l'équation: $F\left(\frac{OX}{AX'}, \frac{OY}{BY'}, \frac{OZ}{CZ'}\right)$ remplacer les rapports des coordonnées tétraédriques par les rapports des distances du point aux faces du tétraèdre $OABC$: l'eq. de la surface devient:

$$F\left(\frac{z'}{z}, \frac{z''}{z}, \frac{z'''}{z}\right) = 0$$

eq. homogène en z, z', z'', z''' et de degré n

Considérons un point m , douze projections sur les 3 axes
parallèlement aux plans coordonnés sont x, y, z . Menons
par les points m, x, y, z le plan parallèle ^{opposé} et par l'origine
un axe fixe OK : cet axe rencontre les 4 plans en 4 points $\mu,$
 α, β, γ tels qu'on a:

$$oa + ob + oc = o\mu$$

ou:
$$\frac{oa}{o\mu} + \frac{ob}{o\mu} + \frac{oc}{o\mu} = 1.$$

Si l'on transforme la figure par homographie, on obtient
le plan ABC homologue de l'infini; les 3 plans menés par M
(homologue de m) et les 3 côtés du tétra. ABC , qui rencontrent
les axes OA, OB, OC en X, Y, Z . Si par une droite quelconque du
plan ABC on mène le plan passant par M, X, Y, Z , ils
rencontreront un axe fixe OK en 4 points $\mu, \alpha, \beta, \gamma$,
et l'on aura; en appelant i le point où OK perce le plan ABC :

$$\frac{O\alpha}{O\mu} : \frac{i\alpha}{i\mu} = \frac{Oa}{o\mu} \quad \frac{O\beta}{O\mu} : \frac{i\beta}{i\mu} = \frac{Ob}{o\mu} \quad \frac{O\gamma}{O\mu} : \frac{i\gamma}{i\mu} = \frac{Oc}{o\mu}$$

La relation précédente devient:

$$\frac{O\alpha}{i\alpha} + \frac{O\beta}{i\beta} + \frac{O\gamma}{i\gamma} = \frac{O\mu}{i\mu}$$

Si l'axe OK est parallèle au plan ABC (i à l'infini) on a:

$$Oa + Ob + Oc = O\mu.$$

Si la droite prise dans le plan ABC est à l'infini (si les 3 plans
sont parallèles à la base du tétraèdre ABC) il vient:

$$\frac{OX}{AX} + \frac{OY}{BY} + \frac{OZ}{CZ} = \frac{OM}{HM}$$

(H étant le point où la droite OM rencontre le plan ABC)
On a la théorème: La somme des coordonnées tétraédriques d'un
point est égale au rapport de sa distance à l'origine à sa
distance au point où la droite qui le joint à l'origine perce
le plan de la base.

Si les points A, B, C sont à l'infini, on a un nouveau système de coordonnées rectilignes; une surface $F(x, y, z)$ devient par la transformation: $F(\lambda x, \mu y, \nu z) = 0$.
On peut identifier les 2 systèmes de axes, on a alors les homographiques rapportés aux mêmes axes.

Construction des figures homographiques.

On peut choisir arbitrairement les 5 points homologues de 5 points donnés.

Soient a, b, c, d, e les 5 points donnés; A, B, C, D, E les 5 points homologues. Pour construire l'homologue M d'un autre point m quel que, on mène les plans ebc, mbc et les plans EBC, MBC , qui rencontrent AD en e', d' . On a la relation

$$\frac{ae}{da} : \frac{ae}{de} = \frac{Ae'}{Dd'} : \frac{Ae'}{De'}$$

qui détermine le point d' et par suite le plan MBC .
Même on détermine les plans MCA, MAB ; les 3 plans déterminent le point M .

Pour construire le plan P homologue du plan p , soit α, β, γ les points où celui-ci rencontre ad, bd, cd ; les points homologues α', β', γ' sont déterminés par la relation anharmonique:

$$\frac{ae}{da} : \frac{ae}{de} = \frac{Ae'}{Dd'} : \frac{Ae'}{De'}$$

et les 3 points α', β', γ' déterminent le plan P .

- La relation anharmonique peut s'écrire:

$$\frac{ae}{da} = \frac{Ae'}{Dd'} \left(\frac{ae}{de} : \frac{Ae'}{De'} \right) = \lambda \frac{Ae'}{Dd'}$$

$$\frac{be}{db} = \mu \frac{Be'}{Dd'}$$

$$\frac{ce}{dc} = \nu \frac{Ce'}{Dd'}$$

D'où le théorème général suivant :

Étant donnés 2 tétraèdres quelconques $abcd$, $ABCD$, et par chaque point d'une figure donnée ou même 3 plans passant par les arêtes bc , ca , ab du 1^{er} tétraèdre, et rencontrant les arêtes opposées en α , β , γ ; et que sur les 3 arêtes AD , BD , CD du 2^e tétraèdre on prenne 3 points α' , β' , γ' déterminés par les relations :

$$\frac{\alpha\alpha'}{d\alpha} = \lambda \frac{A\alpha'}{D\alpha'} \quad \frac{\beta\beta'}{d\beta} = \mu \frac{B\beta'}{D\beta'} \quad \frac{\gamma\gamma'}{d\gamma} = \nu \frac{C\gamma'}{D\gamma'}$$

(où λ , μ , ν sont 3 constantes arbitraires)

le point d'intersection des 3 plans $\alpha'BC$, $\beta'CA$, $\gamma'AB$ décrira une figure homographique à la proposée.

On peut remplacer les coordonnées tétraédriques d'un point par les rapports des distances aux 3 faces de la base du tétraèdre : Soient p , q , r , s les distances du point m aux 4 faces du 1^{er} tétraèdre, p' , q' , r' , s' celles du point M aux 4 faces du 2^e tétraèdre, si l'on a les relations :

$$\frac{p}{s} = \lambda \frac{p'}{s'}, \quad \frac{q}{s} = \mu \frac{q'}{s'}, \quad \frac{r}{s} = \nu \frac{r'}{s'}$$

les points m et M décriront deux figures homographiques.

De même, α , β , γ étant les points où un plan p coupe les 3 arêtes ad , bd , cd du 1^{er} tétraèdre; α' , β' , γ' les points où un plan P coupe les 3 arêtes AD , BD , CD du 2^e tétraèdre; on peut remplacer les rapports $\frac{\alpha\alpha'}{d\alpha}$, $\frac{\beta\beta'}{d\beta}$, $\frac{\gamma\gamma'}{d\gamma}$, $\frac{A\alpha'}{D\alpha'}$, $\frac{B\beta'}{D\beta'}$, $\frac{C\gamma'}{D\gamma'}$ par les rapports des distances des 2 plans aux 4 sommets du tétraèdre correspondant; et si l'on a entre ces distances les mêmes relations qu'à-dessus, les plans p et P envelopperont deux figures homographiques.

Ainsi les 3 équations: $\frac{ax}{Dx'} = \lambda \frac{Ax'}{Dx'}$, $\frac{by}{Dy'} = \mu \frac{By'}{Dy'}$, $\frac{cz}{Dz'} = \nu \frac{Cz'}{Dz'}$
suffisent pour construire les points et les plans d'une figure
homographique d'une figure proposée, dans le cas le plus général.

Cas particuliers Si d est à l'infini; on a simplement
 $ax = \lambda \frac{Ax'}{Dx'}$, $by = \mu \frac{By'}{Dy'}$, $cz = \nu \frac{Cz'}{Dz'}$

(Remarque: ces équations, qui se déduisent rigoureusement de la
relation générale anharmonique, s'obtiennent en faisant tendre
dans les constantes les segments infinis dx , dy , dz .)

Si d et D' sont à l'infini, les formules deviennent
 $ax = \lambda Ax'$, $by = \mu By'$, $cz = \nu Cz'$

Si au contraire les bases abc , ABC sont à l'infini, on a
 $dx = \lambda Dx'$, $dy = \mu Dy'$, $dz = \nu Dz'$

[Dans cette transformation, la surface $F(x, y, z) = 0$
devient la surface $F(\lambda x, \mu y, \nu z) = 0$. (Voir plus haut)]

Si d et la base ABC sont à l'infini, on a simplement
 $ax = \frac{\lambda}{Dx'}$, $by = \frac{\mu}{Dy'}$, $cz = \frac{\nu}{Dz'}$

Théorème. I: Étant donné un tétraèdre $SABC$ et un
plan arbitraire; si par chaque point M de ce plan on mène les
droites MB , MC , MA qui coupent les arêtes SA , SB , SC en
des points α , β , γ ; si d'autre part on a un tétraèdre $S'A'B'C'$, et qu'on prenne
sur ses arêtes $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ des points α' , β' , γ' tels qu'on ait

$$\frac{Ax}{Sx} = \lambda \frac{A\alpha'}{S'\alpha'}, \quad \frac{By}{Sy} = \mu \frac{B\beta'}{S'\beta'}, \quad \frac{Cz}{Sz} = \nu \frac{C\gamma'}{S'\gamma'}$$

les 3 plans $\alpha'B'C'$, $\beta'C'A'$, $\gamma'A'B'$ détermineront un point
à pour lieu géométrique un plan.

Si, dans les mêmes conditions, on fait tourner autour d'un point fixe un plan qui coupe les 3 arêtes du tétraèdre en α, β, γ , que l'on prenne les 3 points α', β', γ' sur les arêtes du 2^e tétraèdre suivant la même loi; le plan déterminé par ces 3 points $\alpha'\beta'\gamma'$ passera constamment par un point fixe.

Chacun de ces 2 théorèmes, qui sont des corollaires de la théorie des figures homographiques, est tel qu'on en peut déduire toute cette théorie, et le principe de homographie lui-même.

Construction analytique des figures homographiques.

Soient OX, OY, OZ les 3 axes homologues de Ox, Oy, Oz ; les formules de transformation sont:

$$x = \frac{\lambda X}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z + 1}, \quad y = \frac{\mu Y}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z + 1}, \quad z = \frac{\nu Z}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z + 1}$$

Si l'on mène le plan YOZ parallèle au plan qui dans la 1^{re} fig. la figure xyz , on a simplement: homologue de l'infini

$$x = \frac{\lambda X}{X - A}, \quad y = \frac{\mu Y}{X - A}, \quad z = \frac{\nu Z}{X - A}$$

($X - A = 0$ étant l'équation du plan homologue de l'infini.)

Ces formules sont absolument générales.

Dans le plan, les formules générales sont:

$$x = \frac{\lambda X}{\alpha X + \beta Y + 1}, \quad y = \frac{\mu Y}{\alpha X + \beta Y + 1}$$

$$\text{ou simplement: } x = \frac{\lambda X}{X - A}, \quad y = \frac{\mu Y}{X - A}$$

($X - A = 0$ étant l'équation de la droite homologue de l'infini.)

Les formules suivantes (dues à Newton) sont tout aussi générales:

$$x = \frac{\lambda}{X}, \quad y = \frac{\mu Y}{X}$$

Pour cela, il faut prendre OX et Ox homologues de l'infini, et OY et Oy homologues l'un de l'autre.

Pour placer 2 figures homographiques de manière qu'elles
à un même système d'axes, elle donnent lieu aux formules
les plus simples, il suffira de prendre la droite I homologue
de l'infini de la 1^{re}, la droite J homologue de l'infini
de la 2^e, et de les faire coïncider, en les prenant pour axes
 x et des X . On prendra pour axe des y et des Y la droite
qui est à elle-même son homologue dans la nouvelle
position des 2 figures (il en existe toujours une telle dans
toute position de 2 figures homographiques). On aura
les formules: $x = \frac{\lambda}{X}$, $y = \frac{\mu Y}{X}$.

Les formules générales de transformation homographique
des 2 figures sont rapportées aux mêmes axes et situées
manière qu'une par rapport à l'autre, sont (Weierstrass)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \frac{a'X + b'Y + c'Z + 1}{aX + bY + cZ + 1} \\ y = \mu \frac{a''X + b''Y + c''Z + 1}{aX + bY + cZ + 1} \\ z = \nu \frac{a'''X + b'''Y + c'''Z + 1}{aX + bY + cZ + 1} \end{array} \right. \quad \text{et dans le plan}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \frac{a'X + b'Y + 1}{aX + bY + 1} \\ y = \mu \frac{a''X + b''Y + 1}{aX + bY + 1} \end{array} \right.$$

Etant données dans un plan 2 figures dont les coordonnées
(par rapport aux mêmes axes) vérifient les relations précédentes
on peut toujours, en changeant leur position relative,
les rapporter à un système d'axes tel que les relations entre
les coordonnées de 2 points correspondants qu'on voudrait
form: $x = \frac{\lambda}{X}$, $y = \frac{\mu Y}{X}$

[Dans les formules générales figurent 15 coefficients arbitraires. 6 déterminent
la position de la figure homographique il en reste 9 pour déterminer la

Théorie des figures homologues (Poncelet)

Si l'on prend les points a, b, c, d pour leurs propres homologues, et si de plus on prend pour homologue d'un 5^e point m un point m' de la droite dm , les coefficients λ, μ, ν seront égaux dans les formules:

$$\frac{ax}{dx} = \lambda \frac{ax'}{dx'}, \quad \frac{bx}{dx} = \mu \frac{bx'}{dx'}, \quad \frac{cx}{dx} = \nu \frac{cx'}{dx'}$$

parce que les 3 rapports anharmoniques égaux à λ, μ, ν seront tous égaux au rapport anharmonique des 4 points d, m, m' et d (point au la droite dm par le plan abc). Tous les couples de points homologues seront alors en ligne droite avec d . Tous les points du plan abc seront leurs propres homologues; les plans homologues et les droites homologues se coupent dans ce plan. Toute droite et tout plan passant par le sommet d et son propre homologue. Le point d est le centre de homologie; le plan abc est le plan de homologie.

Propriété fondamentale des figures homologues:

Soient a, a' 2 points homologues, S le centre de homologie, A le point où la droite Saa' percute le plan de homologie; on a la relation:

$$\frac{Sa}{Sa'} : \frac{Aa}{Aa'} = C^{\text{te}}.$$

Les plans homologues de l'infini dans les 2 figures sont parallèles au plan d'homologie. Soit ai' la distance du point a' au plan I' homologue de l'infini de la 1^{re} fig; on a:

$$Sa = \lambda \cdot \frac{Sa'}{ai'}$$

Soit ai la distance du point a au plan I homologue de l'infini de la 2^e fig; on a:

$$ai \cdot ai' = C^{\text{te}}$$

(cf. page 2
du min. sur le
prin. d'homogr.)

Dans la relation générale, on peut remplacer les segments aa' par les distances des points a et a' au plan de l'homologie d'où cette théorie: Dans deux figures homologiques, la distance de 2 points homologues au centre d'homologie est proportionnel au rapport de leurs distances au plan d'homologie.
(cf. page 5 du même sur le princ. de dualité.)

Propriété fondamentale des axes conjugués d'une quadrique.

Soit une surface du 2^e degré A , un point fixe S et un plan fixe P . Soit ap la distance d'un point a de la surface au plan P .

L'on porte sur Sa une longueur:

$$Sa' = \lambda \frac{Sa}{ap}$$

Le point a' décrira une surface homologique de la proposée; S sera le centre de homologie, et le plan P sera le homologue de l'infini de la nouvelle figure.

Si, de plus, le plan P a pour pôle S par rapp. à la surface, le point S sera le centre de la desurfaut (pôle de l'infini).

Donc: Etant donnée une quadrique, tout point de l'espace peut être pris pour le centre d'une nouvelle quadrique homologique de la 1^{re} par rapport à ce centre.

Cette 2^e quadrique est indéterminée de grandeur, mais sa forme est déterminée dès qu'on a choisi le point S .

Inversement, la surface A' étant donnée, on peut construire une surface A homologique de A' par rapport à son centre S de A' . Cette surface sera indéterminée de forme et de position; car le plan P est alors arbitraire. On la construira par la formule:

$$\frac{Sa}{ap} = \frac{1}{\lambda} Sa'$$

Si A' est une sphère, on a:

$$\frac{Sa}{ap} = Cte$$

propriété commune des surfaces de révolution du 2^e degré:

La surface homologique d'une sphère par rapport à son centre est une quadrique de révolution ayant ce centre pour foyer.

- Deux surfaces de révolution qui ont un foyer commun sont homologiques par rapport à ce foyer.

- Menons dans A' 3 diamètres conjugués (la polaire de chacun d'eux est à l'infini dans le plan des 2 autres). Leurs homologues seront 3 axes conjugués de la quadrique A .

par rapport au point S. Or ces droites sont à elles-mêmes leurs homologues (car elles passent par S) d'où l'éthère.

Chaque système de 3 axes conjugués d'une quadrique relatifs à un point fixe, forme, en direction, un système de 3 diamètres conjugués d'une autre quadrique ayant son centre en ce point, et homologique de la première par rapport à ce point.

Les demi-diamètres de la seconde quadrique se construisent par la formule:

$$Sa' = \lambda \frac{Sa}{ap}$$

ap étant la distance du point a au plan polaire par rapport à la quadrique proposée.

Soyent 3 axes conjugués Sa, Sb, Sc , et les 3 diam. conjugués correspondants: $Sa' = \lambda \frac{Sa}{ap}$, $Sb' = \lambda \frac{Sb}{bp}$, $Sc' = \lambda \frac{Sc}{cp}$

On sait que: $Sa'^2 + Sb'^2 + Sc'^2 = C^2$

Donc: $\left(\frac{Sa}{ap}\right)^2 + \left(\frac{Sb}{bp}\right)^2 + \left(\frac{Sc}{cp}\right)^2 = C^2$

(cf. p. 6 du mem. sur le princ. d'homogr.) (p. 22.)

Parmi tous les systèmes d'axes conjugués relatifs à un point il y en a un où les 3 axes sont rectangulaires.

Si les 3 demi-diamètres Sa', Sb', Sc' sont rectangulaires, on a:

$$\frac{1}{Sa'^2} + \frac{1}{Sb'^2} + \frac{1}{Sc'^2} = C^2 \quad \text{Donc:} \quad \left(\frac{ap}{Sa}\right)^2 + \left(\frac{bp}{Sb}\right)^2 + \left(\frac{cp}{Sc}\right)^2 = C^2$$

Autre forme de la formule générale: soient a, b les extrémités d'un axe conjugué; a', b' les extrémités du diam. correspondant; $Sa' = \lambda \frac{Sa}{ap}$, $Sb' = \lambda \frac{Sb}{bp}$, $Sa' =$

On a: $\frac{1}{ap} \pm \frac{1}{bp} = C^2$ (+ quand S est à l'intérieur de la

$$\text{D'où:} \quad \frac{1}{Sa'} = \mu \left(\frac{1}{Sa} \pm \frac{1}{Sb} \right)$$

Système particulière de transformation homographique.

Si le plan à l'infini est son propre homologue, et si les axes Ox', Oy', Oz' sont homologues respectivement des axes Ox, Oy, Oz , les formules de transformation deviennent

$$x' = \lambda x, \quad y' = \mu y, \quad z' = \nu z.$$

Cette transformation est caractérisée par la conservation du parallélisme: les droites et plans parallèles ont pour homologues des droites et plans parallèles.

Deux droites homologues sont divisées en parties proportionnelles par des points homologues.

Donc les relations métriques suivantes:

Le rapport de 2 segments rectilignes parallèles est égal au rapport de leurs homologues.

Le rapport des aires de 2 ^{situés dans des} polygones plans parallèles est égal au rapport des aires des polygones homologues.

Les volumes de deux solides homologues sont proportionnels.

Ces relations métriques sont susceptibles d'une représentation géométrique. Soit une sphère de la 1^{re} fig; elle a pour homologue un ellipsoïde de la 2^e fig. Le rapport d'un segment AB de la 1^{re} fig. au rayon de la sphère qui lui est parallèle est égal au rapport du segment homologue $A'B'$ au demi-diamètre D de l'ellipsoïde qui lui est parallèle: donc

$$\frac{AB}{R} = \frac{A'B'}{D} \quad \text{ou:} \quad AB = \lambda \frac{A'B'}{D}$$

Toute relation entre des longueurs rectilignes se transformera en divisant les longueurs des lignes homologues par les demi-diamètres qui leur sont parallèles de l'ellipsoïde fixe. Toute relation entre des aires planes se transformera en divisant les aires des fig. planes homologues par les aires du parallélogramme

Constructs sur 2 diamètres conjugués de l'ellipsoïde situés dans des plans respectivement parallèles à deux de ses faces.

Transformation des propriétés de la sphère et du cercle en propriétés de l'ellipsoïde et de l'ellipse.

Equation de la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

devient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

A deux rayons perpendiculaires d'un cercle :

$$x'' = y'$$

$$y'' = -x'$$

Correspondent 2 demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde :

$$x'' = \frac{a}{b} y'$$

$$y'' = -\frac{b}{a} x'$$

rapportés à 2 axes conjugués quelconques.

Soit un ellipsoïde rapporté à 3 diamètres conjugués. Soit un point m rapporté à ces 3 axes, et d le point le rayon Om perpendiculaire à l'ellipsoïde : on a x, y, z étant les coord. de m :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{Om^2}{Od^2}$$

Autre forme de la théorie des figures homographiques.

On dit que 2 droites sont divisées homographiquement, si l'on fait correspondre les points de l'une aux points de l'autre de telle sorte que le rapport anharmonique de 4 points quelconques de l'une soit égal au rapport anharmonique des 4 points correspondants de l'autre.

Si l'on a 2 séries de plans passant respectivement par 2 droites, on dit qu'ils forment 2 faisceaux homographiques, si l'on établit entre les plans de l'un aux plans de l'autre de telle sorte qu'ils correspondent que le rapport anharmonique de 4 plans quelconques de l'un soit égal au rapport anharmonique des 4 plans correspondants de l'autre.

De même, dans un plan, 2 faisceaux de droites sont homographiques quand, etc.

Proposition. Quand 2 droites de l'espace sont divisées homographiquement, les droites qui joignent les points homologues forment un hyperboloïde à une nappe.

Proposition. Quand on a de l'espace 2 faisceaux de plans homographiques, les droites d'intersection des plans homologues forment un hyperboloïde à une nappe.

Propositions analogues dans le plan:

Proposition. Quand 2 droites d'un plan sont divisées homographiquement, les droites qui joignent les points homologues enveloppent une conique tangente à ces 2 droites.
(propriété anharmonique des tangentes d'une conique)

Proposition. Quand on a dans un plan 2 faisceaux de droites homographiques, les droites homologues se coupent sur une conique qui passe par les sommets des 2 faisceaux.
(propriété anharmonique des points d'une conique)

Corollaire. Quelle que soit la position relative de 2 figures homographiques dans un même plan, il existe en général 3 points et 3 droites qui coïncident avec leurs homologues. Deux des 3 points peuvent être imaginaires, le 3^e est toujours réel. Deux des 3 droites peuvent être imaginaires, la 3^e est toujours réelle. Quand les 3 points sont réels, les 3 droites sont celles qui joignent.

Application à la perspective (cf. Clebsch, ch. III, § 1)

La perspective est une transformation homographique de figures planes. — Inversement, la transformation homographique de figures planes peut se ramener à la perspective.

Problème. Étant donnés 2 quadrilatères plans, dont les sommets se correspondent un à un, les placer d'une manière qu'ils soient la perspective l'un de l'autre. — S'ils sont en perspective, les côtés homologues se coupent sur une même droite (l'intersection des 2 plans); et si l'un des plans est l'autre par une rotation autour de l'intersection, les sommets des 2 quadrilatères seront toujours en perspective. Tout revient donc au problème suivant.

— Étant donnés 2 quadrilatères quelconques dans un plan, dont les sommets se correspondent un à un, les placer d'une manière que les droites qui joignent les sommets correspondants concourent en un point, et que les côtés correspondants se coupent sur une même droite.

Soient $abcd$, $a'b'c'd'$ les 2 quadrilatères donnés. Ces figures homographiques complètement déterminées, si l'on peut construire avec ces données les points homologues points quelconques, et les droites homologues de droites quelconques.

On déterminera la droite I homologue de l'infini de la 1^{re} fig. et la droite I' homologue de l'infini de la 2^e fig. On les disposera parallèlement l'une à l'autre. Par le point e où ab rencontre I ou même eg parallèle à $a'b'$: la droite homologue eg' sera parallèle à $a'b'$, donc à eg . De même, par le point f où cd rencontre I ou même fh parallèle à $c'd'$: la droite homologue fh' sera parallèle à $c'd'$, donc à fh . Soit S l'intersection de eg , fh , S' l'intersection de eg' , fh' : il suffira de faire coïncider les angles eSf , $e'S'f'$ pour résoudre le problème.

Le point S (ou S') sera le point de concours des droites qui joignent les points homologues: car les droites Se , Sf et $S'e'$ (parallèles à I et I') sont leurs propres homologues.

La droite où se coupent toutes les droites homologues est parallèle à I et à I' , et distante de I d'une longueur égale à la distance de S à I .

Pour mettre les deux figures en perspective dans l'espace, il suffit de faire tourner l'une d'elles autour de la droite précédente (ligne de terre).

Ainsi deux figures homographiques planes peuvent être mises en perspective.

Deux perspectives d'une même figure plane peuvent être mises en perspective.

Mais: Deux figures homographiques à 3 dimensions ne peuvent pas, en général, être placées de manière à devenir homologues.

La transformation homographique dans l'espace est donc plus générale que la transformation homologique.

Formules pour construire un triangle rectangle à côtés rationnels :
 la 1^{re} de Pythagore, la 2^e de Platon, selon Proclus;
 la 1^{re} de Pythagore, la 2^e d'Archytas, selon Proce.

Si a est impair: $\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 + a^2$

Si a est pair: $\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right]^2 = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1\right]^2 + a^2$

Formule plus générale de Brahmagupta:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{b} + b \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{b} - b \right)^2 + a^2.$$

Brahmagupta (VI^e siècle) ~~Arithm.~~ Ganita (Arithm.) Cuttaca (Algèbre)

Bhaskara Acharya (XII^e s.) Lilavati (Arithm.) Bija Ganita (Algèbre)

Dans le trapèze quadrilatère inscrit ayant ses diagonales perpendiculaires, l'aire est égale à la demi-somme des produits des côtés opposés (car cette aire est égale au demi-produit des diagonales, lequel produit, par le th^m de Ptolémée, est égal à la somme des produits des côtés opposés.)

Pour un quadrilatère ^{inscrit} de périmètre $2p$, des côtés a, b, c, d , l'aire est $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

Pour ^{un} triangle, l'aire est $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

C'est un cas particulier du quadrilatère ($d=0$.)

Triangle dont les côtés, la hauteur et l'aire sont rationnels: 13, 14, 15, formé des 2 tr. rect. 5, 12, 13, et 9, 12, 15.

Pour construire le trapèze, au point 2 triangles rectangles à côtés rationnels: a, b, c et a', b', c' . Les 4 côtés du trapèze sont $ac', bc', a'b', b'a'$: dans l'ordre: $ac', bc', a'b', b'a'$.
 Diagonales: $ab'+ba', aa'+bb'$.

Le diam. du cercle circonscrit est égal à la racine carrée de la somme des carrés des côtés opposés : cc'.

La perp. abaissée du point d'intersection des 2 diag. sur une partage le ~~autre~~ côté opposé en 2 segments égaux.

Car la somme des carrés des côtés opposés est égale à la somme du carré des 2 segments des 2 diagonales, laquelle est égale au carré du diamètre.

Prætorius (1537-1606) Problema quod pibet ex quatuor lineis rectis datis quadrilaterum fieri, quod sit in circulo, aliquot modis explicatum. Nuremberg, 1598. in 4o. 36 p.

Oronce Fincké :

Geométrie, Arithmétique, pratique

p. Morisanius : Arithm. practica.

Geometria Practica & Arithmetica

Léonard de Pise, dit Fibonacci (1202) Pratiqua della forma

Jordan Nemorarius : Arithmétique pratique (v. 1200).

Cardan Arithmetica Practica arithmetica Descriptio

Sacro Bosco : Tractatus Algorismi (1236) en vers Descriptio

Ramus :

Schola mathematica Francfort

Vincens de Beauvais (1194-1264) Speculum doctrinale

Lucas de Borgo : Euclide (Veniz 1509) Summa de Arithm. Geometria

de Divina proportionem.

Verba filiorum Moysi, filii Sethaker, Mahumeti, Hameth,

(Mohammed ben Musa) à la Bibliothèque Nat. en

Tartalea : Le qm, des nombres et des mesures, Algebra nova

Bède le Vénérable (672-735) Œuvres math. Traité attrib. à

Libri : Hist. des Sc. math. en Italie

Montuclat : Hist. des Math.

Delambre : Hist. de l'Astron.

Georgii Vallæ Placentini ... de expetendis et fugiendis rebus opus ...
Venise, 1501.

Margarita philosophica (1496)
Allen Girard: Trigonometrie (1626.)

Ludolph van Ceulen: de problematibus miscellaneis.

B. de Benedictis: Didascalium Speculationum mathematicarum
et physicarum libri. Taurini, 1585.

Scaliger: Cyclometrica elementa (Leyde, 1594) (erreurs).

Adrianus Romanus: Apologia pro Archimede ... Witeburgi, 1597.

Clavius: Geometriae praecepta. Euclidis elementa Romae, 1574.

Simon Jacob: Rechnung auf der Linie. Frankfurt 1557.

Rechenbuch auf der Linie und Ziffern. 1560.

Regner de Pelly: Diophauntus geometrica. Paris, 1660.

Tr. de proportion harmonica. Paris, 1658.

Purbach (1423-1461): Tractatus Georgii Purbachii super

propositionibus Ptolemaei de sinibus et chordis.

Regiomontanus (1436-1476) Logistica (1559)

Regiſon (1492-1572) De quadratura circuli. Lyon 1559.

Strophov (XVII^e s.) Praxis numerandi quæ obacum dicunt.

Simon Stevin: Œuvre mathématique. Leyde, 1634.

Algorithmus demonstratus

Logistica arithmetica questionum.

Isidorus Capella: Satyricon

Cassiodore. Boèce Œuvre.

Sextus Frontinus: De aqueductibus urbis Romæ.

Alstedius: Encyclopaedia uniuersa Herborn, 1620, 1630, Lyon
 Kircher: Aritmologia Rome 1665. Arithmetica et
 Jacques Pelatier, de l'Acad. des Sciences: Euclides Elementa Lyon, 1801
 (Algebre) (1554.) en français: Girard, 1609
 Thomas Bradwardin: Geometria speculativa Paris 1496
 Heibronner: Historia Mathematica
 Charles de Bouvelles: Geometrie, en latin 1503, en français
 Daniel Barbaro: La pratica della prospettiva. Venise 1568
 Jean Priscien: Apologia pro Aristotele et Euclide contra Rammum
 Lefel (XVI s.) Arithmetica integra Dantisci, 1652
 Mohammed ben Musa: Tr. de Algebre (Algebra et Arithmetica)
 (IX s.) De fig. planis et sphaericis
 Cassiri: Bibliotheca Arabico-Hispana (grec)
 Alkindus (contemp. de Moh. ben Musa) Arithm. Indica; Algebra
 Albategnius († 928) astronomi: Trigonometrie; Sinus & tangentes
 (Mohammed ben Musa)
 Aboul Wefa (937-998) Tangentes
 Ibn-Younis (979-1008) Alfarabius (X s.)
 Geber (1038) Trig. sphaerique
 Thebit ben Corah, élève de Moh. ben Musa: Gnomonique
 application de l'algebre à la geometrie.
 Aboul Hassan Ali du Maroc (XIII s.) Gnomonique; sections con.
 ap. Sedillot: Tr. des instruments astron. des Arabes. Paris
 Mahomet Bagdadin (X s.) De superficieum diuisionibus
 trad. par Jean Dee et Commandin.
 Alhazen: Optica thesaurus (Bale, 1572)
 Hassan ben Haithem († 1038) Tr. des conues geometriques
 Nassir-ed-din de Tbrus (1201-1274) Euclide, avec commentaire (Rome)

Théorème démontré ainsi le carré de l'hypoténuse:



$$c^2 = 4 \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

Bède le Vénérable: Munich, Astronomie

De numeris arithmeticiis De numerorum divisione

De arithmeticiis propositionibus

Alcuin, élève de Bède

Gerbert (pape 999, † 1005) Géométrie, Abacus compositus

Adalbold, évêque d'Utrecht: de Astronomia seu Abaco

Volumen de la sphère: $D^3 \frac{11}{21}$

Heriger, abbé de Laubis: Ratio Abaci

Beinclin: Abacus Musica Arithm. et Geom.
De Abaco et numeris

Hermann Contractus: Quadrature du cercle, Astrolobe (XII^e s.)

Adhémar (XII^e s.) traduit Euclide de l'arabe

Gerard de Crémone (1114-1187) traduit les Arabes: Algorismus

Platon de Tivoli (Libertinus) trad. les Sphériques de Théodon (1120)

Jean de Séville (Johannes Hispanus) trad. des ouvrages astron-
arabes. Algorismus, Algebra et alimucabala

Rodolphe de Bruges. trad. Ptolémée de l'arabe

Campanus. trad. Euclide. Trisection de l'angle

Division d'un droite en moyenne et extrême raison

Sacro Bosco; De sphaera mundi. De Algorismo et
de Computo.

Alexander de Villadius: Aritmetique en vers latins.

Jordan Nemorarius: Aritmetique ^{speculative ou Arithmétique}; Algorismus ^{propos}

Planisphium de Triangulis. de Geometria. de pondere
Optique.

Albert le Grand:

Roger Bacon: Opus majus. Specula mathematica

Vitellion: Optique

Beccan, arch. de Cantorbury: Optique

Vincent de Beauvais: Speculum mundi (1194-1264)

Leonard de Pise, dit Fibonacci: Liber Abaci (1202)

Algebra et Alimcabala Practica Geometria (1220)

Traite des nombres carrés. Alliance de l'algebre et de la geometrie
a l'exemple des Arabes.

XIV^e siècle: Thomas de Bradwardin, arch. de Cantorbury. Thesaurus
du polygone équilatéral (étoile) Geometria speculativa (1344-1346)
In des isoperimetris.

Pedrianus: Geometria, gèodésie.

Barlaam: Logistica (en grec) algebre

Hillingworth: Algorismus Tabla astronomiques.

Simon de Bredon: commun de l'Almageste

Isaac Argyrus: Tabla astronomiques Astrolabe. Geometria

Paolo di Digomari (dit del Abaco)

Biagio di Parma

Prodicino de Padoue: De algorithmo (impr. en 1483)

Guile. Cornairone: directe de la science grecque par les manuscrits.

Pugris de halgibre

Purbach, astronome: Théorique des planètes (impr. en 1488 à
(1425 + 1468) Algorismus (Vienne, 1515) (Vienne)

Traduction de Proclius par Purbach et Regiomontanus (Vienne, 1496)

par Regiomontanus, restaurateur des sciences grecques (1436-1476)

De triangulis (Nuremberg, 1533) la Trigonométrie

Algorismus demonstratus (impr. par Schoner en 1534) usage des
lettres même en arithmétique

Nicolas de Cusa, cardinal: quadrature du cercle

(Encomium compositum, Paris, 1514; Bâle, 1565.) Platonicien.

Albert Durer: Geométrie artistique (en allemand) trad:

Institutionum geometricarum liber IV. duplication du cube.

Traité de perspective

Léonard de Vinci. Tour à orale pour décrire l'ellipse
(cf note XXXIV.)

J. Vermeer: Traité des coniques (1532)

Lucas Pacioli, dit L. di Borgo: Summa de arithmetica,
geometria, proportioni e proportionalità. (1494.)

Divina proportione (Venise, 1509) div. moyen. et extrême raison

Libellus... sur les polygones et polyèdres réguliers (1508)

Application de l'algèbre aux problèmes de géométrie

Stifel: arithmetica integra (Nuremberg, 1544)

Christoph Rudolff: die Cos (algèbre) (1522)

Adam Risen

de Etaples (Faber Stapulensis) publice de l'arithmétique spéculative

Jordan Nemorarius (1496) - Compendium arithmetices Boetii

(1486) théorie des nombres.

Algorithmus de integris et fractionibus (Leipzig, 1507)

J. B. Benedictus: Diversarum speculationum mathematicarum
et physicarum liber (Turin, 1583)

application de la géométrie à l'algèbre

Maurolycus: de lineis horariis libri III (1553, 1575)

la pointe du style d'un quignon décrit une conique
Usage des lettres en arithmétique et en algèbre

Guarini: Euclides adhaustus et methodicus, mathematicae
universalis (Turin, 1671)

Mathematica coelestis (Milan, 1683)

Placita philosophica (Paris, 1666)

~~Il résulte donc que si M. de la Roche a été condamné, son état de santé ne peut être que le résultat d'une maladie, et non d'un accident. Cette condamnation est donc injuste, et le condamné doit être libéré.~~

~~Il résulte donc que si M. de la Roche a été condamné, son état de santé ne peut être que le résultat d'une maladie, et non d'un accident. Cette condamnation est donc injuste, et le condamné doit être libéré.~~

$$b^2 - a^2 = (b+a)(b-a) = (d+c)(d-c) = c(d-c)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

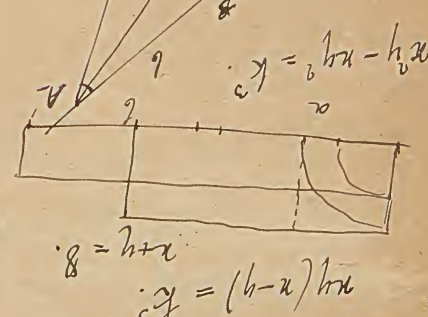
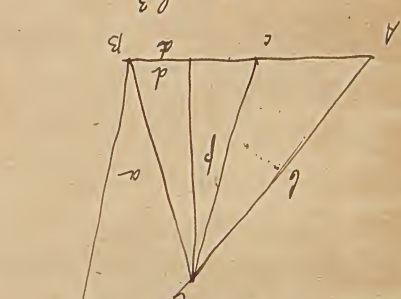
$$x(x+y) = k^3$$

$$xy(x+y) = k^3$$

$$x^2 - y^2 = d^2$$

$$x(8-x)(x-8) = k^3$$

$$x(8-x)(x-8) = 16x^3$$



Géométrie de Steudt.

Georg Karl Christian von Staudt : Geometrie der Lage
(ord. Prof. an d. Univ. Erlangen) (Nürnberg, 1847.)

§ 5: Éléments infiniment éloignés.

54. On a vu (§ 3) qu'en beaucoup de cas un point est remplacé par une direction, une droite par une position (Stellung), et qu'ainsi les éléments d'une droite comprennent encore sa direction, et les éléments d'un plan comprennent encore sa position et toutes les directions qui y sont contenues. Deux droites situées dans un même plan ont ^{ou} un point commun, ou même direction. Deux plans ont, ou une droite commune, ou même position. Un plan contient, soit un seul point d'une droite ~~qui~~ non situé dans ce plan, soit seulement la direction de cette droite. Il ne sera donc pas inutile (un zweckmässig) d'introduire pour la direction et la position d'autres expressions qui rappellent immédiatement ce qu'elles remplacent et donnent aux propositions, qui ne sont que des modifications particulières d'autres propositions, une forme appropriée (als solche bezeichnen?).

55. Rotation d'une droite dans un plan; déplacement de son point d'intersection avec une autre droite fixe du plan. Si l'on attribue à chaque droite un point infiniment éloigné, où elle est coupée par toutes les droites et tous les plans qui lui sont parallèles, cette droite apparaît comme une ligne fermée.

56. Tous les points infiniment éloignés d'un plan sont dits situés sur une ligne infiniment éloignée, et comme toute droite du plan la coupe en un seul point, on l'appelle une droite.

57. Tous les points et droites infiniment éloignés sont dits situés dans une surface infiniment éloignée, et comme toute droite la

Coupe en un point et tout plan ^{suivant} en une droite, on appelle
un plan

58. Par la conception exposée dans ce §, qui par opposition
avec la conception habituelle peut s'appeler perspective
des propositions souvent toutes différentes en apparence sont
~~tenues~~ dans une énoncée, et on peut lever des exceptions qui
^{rassemblées} autrement s'opposeraient fréquemment à l'établissement
de lois générales.

Cette proposition : Une droite est déterminée par
deux points, comprend deux cas particuliers, suivant qu'un
des points ou tous les deux sont situés à l'infini. En effet
une droite proprement dite est aussi déterminée par un point
et par sa direction, et une position (droite à l'infini) est
déterminée par deux directions (deux points à l'infini).

La proposition : Un plan est déterminé par une droite et un
point extérieur à cette droite, contient le cas particulier où le
point donné est à l'infini (c'est une direction donnée). ⁽³⁷⁾
Ce cas particulier où la droite donnée est à l'infini (c'est
la position du plan qui est donnée) (38).

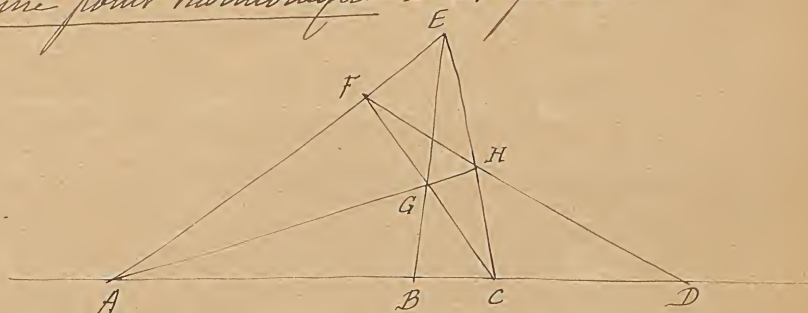
65. Deux rayons parallèles AP, BP rencontrent le plan de
l'infini au même point P, ~~et~~ du même côté s'ils sont du
même sens, de côtés opposés s'ils sont de sens contraires.
En effet, la ligne brisée APB traverse le plan de l'infini
dans le second cas, et ne fait que le toucher dans le premier.

61. Toute droite est partagée par deux quelconques de ses points
en deux segments AB et A.B (ou B.A) complémentaires l'un de l'autre.
Un segment est donc, 1° soit fini, 2° soit aboutissant à l'infini,
3° soit passant par l'infini, 4° soit situé à l'infini.

64. Projection centrale ou perspective.

§ 8. Figures harmoniques.

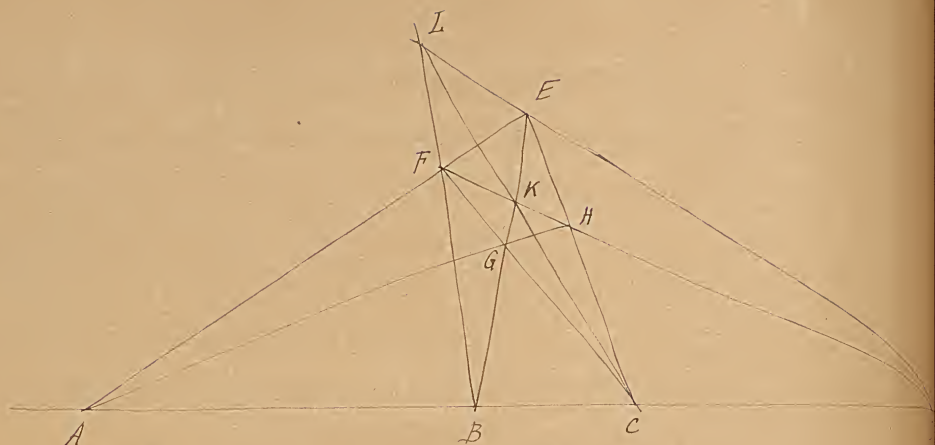
93. Si l'on donne sur une droite trois points A, B, C , et qu'on construise un quadrilatère tel, qu'une diagonale passe par le second des points donnés, et que chacun des deux autres se coupe sur deux côtés opposés, l'autre diagonale du quadrilatère coupe cette droite en un quatrième point D qui est déterminé par les trois points donnés et qui s'appelle le quatrième point harmonique à ces points.



Les points A et C sont séparés (harmoniquement) par B et D.

94. Une figure rectiligne harmonique ABCD donné, par projection à partir d'un point quelconque S situé hors de la droite, un faisceau harmonique de rayons, lequel est à son tour coupé, par toute droite située dans son plan et ne passant pas par son sommet, suivant une figure rectiligne harmonique.

195. Une figure rectiligne harmonique $ABCD$, projetée à partir d'un axe S non situé dans un même plan, et par suite un faisceau harmonique de rayons, projeté à partir d'un point S non situé dans son plan, donne lieu à un faisceau harmonique de plans, lequel est coupé, par toute droite qui ne rencontre pas son axe, suivant une figure rectiligne harmonique, et par tout plan qui ne passe pas par son axe, suivant un faisceau harmonique de rayons.



96. Si $ABCD$ est une figure harmonique,
 $BCDA$, $CDAB$, $DABC$; $DCBA$, $CBAD$, $BADC$, $ADCB$
sont aussi des figures harmoniques.

En effet, 1^o si l'on construit le quadrilatère $EFGH$,
on voit que $ADCB$, $CDAB$, $CBAD$ sont harmoniques.

2^o Les triangles EFC , DBK sont perspectifs (car leurs côtés
correspondants ~~se coupent en un même point~~ ^{se coupent en un même point} donc les
droites ED , FB , CK (qui joignent leurs sommets correspondants)
Concourent en un même point I . En considérant le quadrilatère
 $EKFL$, on voit que $DCBA$, $BADC$, $BCDA$, $DABC$ sont
harmoniques.

102. Si l'on suppose^{un} point projeté sur chaque côté d'un triangle
depuis le sommet opposé, ou sur chaque arête d'un tétraèdre depuis
l'opposé :

1^o Si sur chaque côté d'un triangle on prend deux points qui le
divisent harmoniquement, et si 3 de ces points sont les projections
d'un seul point, les 3 autres sont les traces d'un même droit. (Princ.
de dualité)

2^o Si sur chaque arête d'un tétraèdre on prend deux points qui le
divisent harmoniquement, et si six de ces points sont les projections
d'un seul point, les 6 autres sont les traces d'un même plan. (Princ.
de dualité)

§ 9. Relation projective entre figures uniformes.

103. Deux figures uniformes sont dites projectives (π) quand elles se correspondent l'une à l'autre de telle sorte qu'à une figure harmonique de l'une corresponde une figure harmonique de l'autre. (59.)

104. Deux figures uniformes projectives peuvent en outre être en perspective.

106. Si deux figures uniformes projectives ont trois éléments correspondants communs, tous leurs éléments correspondants coïncident.

107. Si une figure rectiligne et un faisceau, ou si un faisceau de rayons et un faisceau de plans sont projectifs, et que trois éléments du premier soient situés dans les éléments correspondants du second, la première figure est une section de la seconde.

110. Si l'on veut établir une correspondance projective entre deux figures uniformes, il suffit de choisir à volonté trois éléments de l'une et les trois éléments de l'autre qui doivent leur correspondre.

111. Deux figures rectilignes projectives situées sur un même droite sont dites en perspective, si elles ont au moins un élément homologue commun.

112. Deux figures rectilignes projectives qui ne sont pas des sections d'un même faisceau de rayons peuvent être considérées comme la première et la dernière de trois ou quatre figures rectilignes dont chacune est la projection de la précédente à partir d'un point. Et toute succession continue d'éléments dans l'une correspond une succession continue d'éléments dans l'autre.

116. Deux figures uniformes, composées chacune de trois éléments, sont toujours projectives (110.)

§ 10. ~~Affinité~~ ^{Relation} projective entre figures du second degré
et entre systèmes de l'espace

121. Deux figures du second degré ou deux systèmes de l'espace
sont dits $\left\{ \begin{array}{l} \text{collinéaires} \\ \text{réciproques} \end{array} \right\}$ ~~lorsqu'ils~~ quand ils se correspondent de
telle sorte que, à deux éléments hétérogènes P, q du premier
dont l'un P est situé dans l'autre q , correspondent deux éléments
hétérogènes P_1, q_1 du second système, dont l'un, P_1 , $\left\{ \begin{array}{l} \text{passe} \\ \text{par} \end{array} \right\}$ l'autre, q_1 .

Deux systèmes réciproques à un même troisième sont
collinéaires entre eux.

Réciprocité dans le plan et dans l'espace

122. Deux systèmes collinéaires ou réciproques sont projectifs.
Si dans deux systèmes projectifs ~~trois~~ trois éléments correspondants
donnent une même figure uniforme sont communs, tous les
éléments de cette figure sont correspondants à eux-mêmes et communs.

123. Si deux figures collinéaires du second degré ont quatre
éléments homologues (de même espèce) [tels que trois quelconques d'entre
eux n'appartiennent pas à une seule et même figure uniforme]
correspondants communs, tous leurs éléments coïncident.

Si un système plan est collinéaire à un faisceau de rayons, et
que quatre éléments uniformes du premier [tels que trois quelconques
d'entre eux n'appartiennent pas à une seule et même figure uniforme]
sont situés dans les éléments homologues du second, le système
est une section du faisceau de rayons.

124. Si deux systèmes collinéaires dans l'espace ont en commun
quatre éléments homologues correspondants [tels que, &c.] mais que
ils appartiennent tous quatre à une seule et même figure du second degré
ils ont aussi en commun tous les éléments de cette même figure.

7

Si deux systèmes collinéaires ont en commun cinq points correspondants, tels que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas dans un même plan, ou cinq plans correspondants, tels que quatre quelconques d'entre eux ne passent pas par un même point, tous leurs éléments correspondants sont communs. (Il suffit de considérer les 4 droites déterminées par les 5 points ou par les 5 plans.)

125. Deux systèmes collinéaires peuvent en outre être situés en perspective.

129. Si l'on veut établir une correspondance projective entre deux figures fondamentales du second degré, il suffit de faire correspondre (par une relation projective) deux figures fondamentales uniformes A, B de la première, qui ont un élément AB commun, deux figures fondamentales uniformes A_1, B_1 de la même, ayant aussi un élément commun $A_1 B_1$, de telle sorte qu'à l'élément AB considéré comme élément de chacune des deux figures A, B corresponde l'élément $A_1 B_1$ commun aux deux figures A_1, B_1 .

130. Si l'on veut établir une correspondance projective entre deux figures fondamentales du second degré, il suffit de choisir à volonté quatre éléments homogènes [tels que, 8^a] dans l'une, et quatre éléments homogènes qui doivent leur correspondre dans l'autre.

Ainsi un quadrilatère plan complet et un quadrangle plan complet sont toujours réciproques. (cf. 116.)

133. Si l'on veut établir une correspondance réciproque entre deux systèmes de lignes, on peut faire correspondre à cinq points de l'un (tels que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas dans

un même plan) cinq plans de l'autre (tels que quatre quelconques d'entre eux ne passent pas par un même point.)

Si l'on veut établir une correspondance collinéaire entre deux systèmes de l'espace, on peut faire correspondre soit cinq points de l'un (tels que 4^{es}) à cinq points de l'autre (tels que 4^{es}) soit cinq plans de l'un (tels que 4^{es}) à cinq plans de l'autre (tels que 4^{es}).

Un ensemble de cinq points de l'espace et l'ensemble de cinq plans de l'espace sont toujours réciproques (cf. 130, 131). Si l'on veut mettre en perspective deux systèmes plans, situés dans un même plan, de telle sorte qu'ils aient en commun un faisceau de rayons donné S et une droite donnée V (se correspondant à eux-mêmes), on peut en core choisir à volonté, sur un des rayons du faisceau S , le point A , qui doit correspondre au point A du même rayon. De même :

135. Si l'on veut mettre en perspective deux systèmes de l'espace de telle sorte qu'ils aient en commun une gerbe de rayons donnée S et un plan donné V (se correspondant à eux-mêmes) on peut le point S s'appelle centre de perspective, le plan V (ou la droite V) où les droites homologues des deux systèmes se rencontrent s'appelle plan de perspective (ou axe de perspective).

136. Quand deux systèmes de l'espace sont en perspective, toutes les figures rectilignes telles que SAA_1R (où S est le centre, R le point où le rayon rencontre le plan [ou la droite] V , A et A_1 les deux points homologues) sont projectives entre elles. Car soit un autre rayon SBB_1V : les deux rayons sont en perspective par rapport au point de concours des droites homologues AA_1 et BB_1 , lequel est situé dans le plan V (ou sur la droite V).

137. Puisqu'à chaque système Σ on peut assigner un système réciproque, la loi de réciprocité indiquée dans le § 6^e se trouve démontrée (réciprocité du point et du plan dans l'espace, du point et de la droite dans le plan, du rayon et du plan dans la gorge.) [Dans l'espace, la droite correspond au faisceau de plans, le plan à la gorge de rayons; dans le plan, la droite correspond au faisceau de rayons.] Cf. nos 66, 76, 77

Il suffira donc de prouver une proposition pour qu'elle soit par là même démontrée.

138. Deux systèmes collinéaires sont dits en affinité, si à chaque élément propre de l'un correspond un élément propre de l'autre, et si, par suite, leurs éléments à l'infini se correspondent.

Deux systèmes collinéaires plans sont en affinité, quand ils ont en commun la droite de l'infini (homologue à elle-même.)

Deux systèmes collinéaires de l'espace sont en affinité, quand ils ont en commun le plan de l'infini (homologue à lui-même.)

Si deux systèmes en perspective sont en affinité, il faut, soit que le centre de perspective soit à l'infini, soit que le plan de perspective (ou la droite de perspective) soit à l'infini.

Pour mettre deux systèmes plans en affinité, on peut choisir à volonté trois points non situés en ligne droite dans le fini de l'un, et les trois points non situés en ligne droite dans le fini de l'autre, qui doivent correspondre aux 3 premiers.

Pour mettre deux systèmes de l'espace en affinité, on peut faire correspondre à quatre points ~~de l'un~~ pris dans le fini de l'un et non situés dans un même plan, quatre points pris dans le fini de l'autre et non situés dans un même plan.

§ 11. Des lignes, des surfaces et des figures corrélatives.
 139. Si l'on appelle faisceau de rayons du 1^{er} plan, en général, toute succession continue de droites au 1^{er} plan, à toute ligne (succession continue de points) correspond, dans le 2^e plan, un faisceau de rayons, dans l'espace, un faisceau de plans (par réciprocity).

140. Dans deux systèmes réciproques de l'espace, à toute surface (considérée comme ensemble de points) correspond une courbe de plans (dans un sens général) c'est-à-dire un ensemble de plans du second degré.

À toute succession continue de droites correspond (par réciprocity) une succession continue de droites; en d'autres termes, à toute surface réglée correspond une surface réglée. Si l'une est considérée comme ensemble de points, l'autre comme une courbe de plans, c'est-à-dire l'ensemble des faisceaux de plans qui ont pour axe une directrice.

À une courbe plane correspond une surface conique.

141. Définition projective de la tangente à une courbe plane ou gauche, du plan tangent à une surface conique, du plan osculateur à une courbe gauche. Points saillants d'une courbe (caractérisés par deux tangentes différentes).

142. La suite des tangentes d'une courbe plane ou gauche forme un faisceau de rayons (plan) ou une surface réglée; la suite des plans osculateurs d'une courbe gauche ou des plans tangents à une surface conique forme un faisceau de plans.

Chaque courbe gauche représente donc un faisceau de rayons (surface réglée) osculateur, et un faisceau de plans osculateurs. À chaque point de la courbe correspond la tangente en ce point et le plan osculateur en ce point (tangent à la surface réglée et la tangente). Le point est le centre du rayon; la tangente est le plan du plan.

§ 16. Involutions.

213. Si dans deux figures fondamentales projectives entre elles, deux éléments homologues se correspondent doublement (réciproquement) ⁽¹⁾ les deux figures sont dites en involution (π).
Cela suppose qu'elles ont tous leurs éléments communs, mais que tous leurs éléments correspondants ne coïncident pas.

214. Deux figures uniformes hétérogènes, ou même un plan V et une gerbe S , sont en involution, si l'une d'elles est en involution avec une section de l'autre. ⁽²⁾

215. Si deux éléments particuliers se correspondent doublement, il y en a de même de deux autres quelconques, et il y a involution.

216. Si une figure uniforme est en involution avec elle-même, ou bien elle ne contient aucun élément qui coïncide avec son correspondant, ou bien elle en contient deux (éléments d'ordre) qui sont deux à deux et chacun est son propre homologue, suivant que deux éléments homologues sont ou ne sont pas séparés par deux autres éléments homologues. Dans le dernier cas, les éléments d'ordre M, N sont séparés harmoniquement par deux éléments homologues quelconques P, P_1 : $MNPP_1 \pi MNP, P$.

217. Si l'on veut établir une involution dans une figure uniforme, on peut choisir à volonté, soit deux couples correspondants AA_1, BB_1 ; soit un couple AA_1 et un élément d'ordre M , soit deux éléments d'ordre M et N .

218. Exg: $ABC \pi A, B, C$, Si: $AA, BC \pi A, AB, C$,
 $MAB \pi MA, B$, Si: $MAA, B \pi MA, AB$,
 $MNA \pi MNA_1$, Si: $MANA_1 \pi MA, NA$ (figure harmonique)

L'ensemble de trois (ou de plus de trois) couples d'éléments homologues s'appelle une involution.

(2) Cà d. si à l'élément P du plan correspond l'élément SP de la gerbe, et si à l'élément P_1 du plan correspond l'élément SP de la gerbe.

(1) Cà d. si à l'élément P de la première correspond l'élément P_1 de la seconde, et à l'élément P_1 de la première l'élément P de la seconde.

§ 17. Systèmes involutifs.

226. Si l'on considère comme un seul système deux systèmes plans ou deux gerbes de rayons ou deux systèmes de l'espace, qui sont projectifs et en outre en involution, ce système sera appelé système involutif, si les deux systèmes sont collinéaires, et système polaire, s'ils sont réciproques.

227. Si l'on veut considérer un système plan comme involutif, il suffit de prendre dans le plan une droite V pour droite d'ordre 1 et un point S (hors de cette droite) pour centre d'ordre 2. Sur chaque droite qui passe par le centre d'ordre 2 on prendra pour second point d'ordre 2 celui où elle coupe la ligne d'ordre 1, et dans chaque faisceau de rayons ayant son centre sur la ligne d'ordre 1 on prendra pour second rayon d'ordre 2 celui qui passe par le point S .

§ 18. Systèmes polaires dans le plan et dans la gerbe.

234. Si deux systèmes réciproques sont situés dans un même plan, et si les sommets d'un triangle quelconque ABC correspondent aux côtés opposés, les systèmes sont en involution ^{formant un système}.

235. Dans un système polaire plan, chaque point s'appelle le pôle de la droite correspondante, et chaque droite la polaire du point correspondant. Les pôles de toutes les droites issues d'un même point sont sur la polaire de ce point, et les polaires de tous les points d'une même droite concourent au pôle de cette droite.

236. Dans un système polaire plan il y a une infinité de triangles polaires.

Il suffit de prendre une droite, son pôle A , et la polaire d'un des points B , laquelle coupe cette droite en C ; le triangle ABC est autopolaire.

Les sommets d'un triangle ABC sont les pôles des côtés d'un autre triangle $A_1B_1C_1$, les côtés du triangle ABC sont les polaires des sommets du triangle $A_1B_1C_1$; les deux triangles sont dits polaires réciproques.

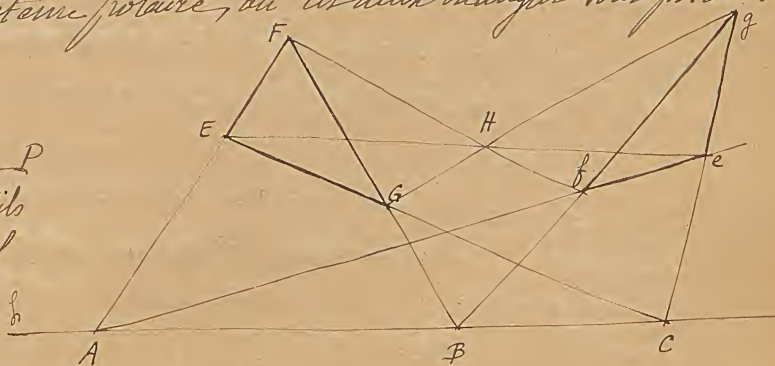
237. Si l'on prend dans un plan un triangle ABC pour triangle polaire, et qu'on fasse correspondre à un point P non situé sur un côté du triangle une droite P_1 qui ne passe pas par un sommet du triangle, on détermine un système polaire.

238. Un système polaire est déterminé par un pentagone ^{plan} $ABCDE$, on lui fait correspondre à chaque sommet le côté opposé. (Corollaire du th. précédent.)

239. Si de deux points l'un est situé sur la polaire de l'autre, et par suite l'autre sur la polaire du premier, les deux points (et les deux droites) sont dits conjugués entre eux (ou entre elles). Si un point est sur la polaire, il est son propre conjugué (la droite aussi).

241. Deux triangles qui n'ont en commun aucun sommet ni aucun angle, mais qui sont situés dans le même plan et en perspective déterminent un système polaire, où ces deux triangles sont polaires réciproques.

242. Deux triangles (ou polygones) d'un même plan P en perspective, lorsqu'ils ont des projections d'un seul même triangle (polygone) sur un plan N par deux points M, M_1 ;



les droites qui joignent les sommets homologues concourent en un point S qui est la trace de la dr. MM_1 du plan N , et les côtés homologues se coupent sur une même droite V qui est la trace du plan N sur le plan P . 240. Si deux triangles remplissent ces conditions, et que la droite V ne soit pas un de leurs côtés, ou que le plan N ne soit pas un de leurs sommets, ils sont en perspective, et remplissent la même condition.

§ 19. Courbes et surfaces du second ordre.

246. Dans un système polaire plan, ou bien il n'y a (235) aucun élément qui soit conjugué à lui-même, ou bien il y a une courbe 5 d'ordre pair, qui correspond au faisceau de rayons qui l'enveloppe (au faisceau de ses tangentes), de telle sorte que chaque point de la courbe est situé dans sa polaire, qui est tangente à la courbe en ce point, et chaque point situé hors de cette courbe (sauf d'ordre du système polaire) est en dehors de sa polaire.

247. Surfaces coniques du second ordre.

248. Une courbe du second ordre s'appelle ellipse, parabole ou hyperbole, suivant que la courbe n'a aucun point commun avec la droite de l'infini, la touche en un point ou la coupe en deux points.

La section d'une surface conique du second ordre par un plan qui ne passe pas par le centre de la surface, est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le plan conique et le plan mené par son centre parallèlement au plan sécant n'ont aucun rayon commun, en ont un ou en ont deux communs. Dans ce dernier cas, les asymptotes de la hyperbole sont les traces des plans tangents à la surface conique suivant les deux rayons communs.

Anhang.

336. De même que l'affinité est un cas particulier de la relation collinéaire, la similitude est un cas particulier de l'affinité et la congruence un cas particulier de la similitude. Dans les systèmes semblables les angles homologues sont égaux; dans les systèmes congruents les segments homologues sont aussi égaux. Deux droites projectives entre elles sont semblables, si au point à l'infini de l'une correspond le point à l'infini de l'autre. Si en outre un segment quel de l'une est égal au segment correspondant de l'autre, les deux systèmes rectilignes sont congruents.

Le même auteur: Beiträge zur Geometrie der Lage.
Erstes Heft - Nürnberg, 1856.

(sur les imaginaires et le rapport anharmonique: Wurf.)
 § 28: L'auteur introduit des nombres infinis, et désigne par $n+1$ le nombre des éléments réels d'une figure une forme (points d'une droite, rayons ou plans d'un faisceau, etc.)

Zweiter Heft - 1857.

§ 28: Nombres complexes (rapport anharmonique dont le carré est égal à -1 harmonique, carré égal à -1 .)

Dritter Heft - 1860.

Extrait de la Préface de la Geometrie der Lage:

On a distingué avec raison, dans les temps modernes, la Géométrie de position de la Géométrie de la mesure, quoique pourtant des propositions où il s'agit question d'aucune grandeur soient habituellement démontrées par la considération de rapports. J'ai essayé dans cet écrit de faire de la Géométrie de position une science indépendante, qui n'ait pas besoin de la mesure.....

Extrait de la Préface des Beiträge:

En s'efforçant de lever les exceptions aux règles et d'embrasser d'un seul point de vue différentes propositions, la mathématique est souvent obligée d'étendre certains concepts ou d'en introduire de nouveaux, ce qui indique presque toujours un progrès dans la science. Telle est notamment l'introduction de grandeurs imaginaires dans l'Analyse, et l'introduction d'éléments

imaginaires dans la Géométrie. Qu'une ellipse ou une hyperbole soit déterminée par ses foyers et une tangente, les anciens géomètres le savaient déjà. Mais que la courbe soit déterminée par ce fait qu'on en donne cinq tangentes, et qu'ainsi le théorème énoncé ne soit qu'un cas particulier d'une proposition plus générale, cela ne ressort que de la considération des éléments imaginaires. Dans ma *Geom. L.* je n'ai pu pénétrer plus avant dans la théorie des éléments imaginaires, ~~dont~~ ^{sur fond} ~~et~~ que les *Beiträge* sont principalement destinés à fonder, parce que je n'avais pas encore réussi à distinguer l'un de l'autre deux éléments imaginaires conjugués. La théorie des éléments imaginaires confère une extension importante au domaine de la Géométrie, et facilite les vues d'ensemble sur les propositions.

Dans la Géométrie analytique, on appelle un point imaginaire (ce qui paraît très simple) quand toutes les coordonnées ne sont pas réelles. Mais par là on ne fait que transporter la langue de l'Algèbre dans la Géométrie, et l'on ne prouve nullement qu'un point imaginaire est, tout comme un point réel, une chose indépendante du système de coordonnées. On est, se demande-t-on, le point imaginaire quand on fait abstraction du système de coordonnées? Ainsi donc la Géométrie manquait, lorsqu'il s'agissait d'éléments imaginaires, de cette évidence que dont ailleurs on lui fait gloire, et qu'on a aussi le droit d'exiger d'elle.

Erlangen, mai 1856.

{ Figures uniformes ou d'un degré: droites, faisceau de rayons, faisceau de plans.
 { Figures du 2^e degré: plan, gerbe de rayons (qui est aussi une gerbe de plans).
 { Figures du 3^e degré: l'espace à 3 dimensions.
 fondamentale (1) Büschel (2) Bündel
 nos 26, 28 (§ II.)

Beiträge zur Geometrie der Lage.

17

§1. Figures élémentaires.

3. Par figure élémentaire on entend une figure uniforme, ou une courbe ou une surface conique ou un faisceau du second ordre, ou un faisceau réglé (Regelschaar = ensemble des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à un nappé, déterminé par 3 droites de ce système ou par 3 droites de l'autre système, appelé faisceau directeur = Leiterschaar.) Il y a donc 3 espèces de figures élémentaires du premier ordre et 5 du second ordre. Une courbe du second ordre est considérée comme un ensemble de points; une surface conique du second ordre, comme un ensemble de rayons.

24. L'ensemble de quatre éléments A, B, C, D d'une même figure élémentaire, conçus dans un ordre déterminé et comme appartenant à cette figure, s'appelle un jet (Wurf.)

Deux jets $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$, appartenant respectivement aux figures élémentaires G et G_1 , sont dits projectifs entre eux, si les deux figures G et G_1 sont projectives, et si aux éléments A, B, C, D de l'une correspondent les éléments A_1, B_1, C_1, D_1 de l'autre.

Parmi les 24 jets qu'on peut former avec quatre éléments A, B, C, D d'une figure élémentaire, ou bien il y en a huit harmoniques, ou bien il n'y en a aucun d'harmonique. Dans le 1er cas chacun des 24 jets est projectif à sept autres, dans le 2e cas, à 3 autres. Dans tous les cas, en effet, on a

$$ABCD \propto BADC \propto CDAB \propto DCBA.$$

38. Un jet $abcd$ et quatre éléments homogènes A, B, C, D , qui sont situés dans un même plan ou qui passent par un même point, mais tels que trois quelconques d'entre eux n'appartiennent pas à une même figure uniforme, déterminent une figure élémentaire du second ordre, à laquelle appartiennent les quatre éléments, et telle que le jet $ABCD$ soit, en elle, projectif au jet $abcd$.

Soient A, B, C, D les sommets d'un quadrilatère plan, U une droite passant par D et coupant BC, AC, AB en A_1, B_1, C_1 , qu'on prenne sur elle le point D_1 , tel que le jet $A_1 B_1 C_1 D_1$ soit projectif au jet $abcd$, et qu'on fasse passer une courbe K du second ordre par les points $A B C D D_1$. Le jet $ABCD$ sera dans la courbe K , projectif au jet $D_1(ABCD)$, donc au jet $A_1 B_1 C_1 D_1$ et par suite au jet donné $abcd$.

§ 3. Du sens des figures.

47. Trois éléments A, B, C d'une figure fermée, qui consiste en une succession continue de points, de droites ou de plans, déterminent une portion ABC de cette figure, qui part du élément A , passe par B et finit en C . Si l'on désigne la figure entière par ABC , on indique par là le sens dans lequel on la suppose décrite; si les éléments A, B, C se déplacent dans la figure sans jamais passer l'un par l'autre (coïncider), le sens ABC ne change pas. Le sens ABC est aussi BCA ou CAB , le sens opposé CBA peut aussi être désigné par BAC ou ACB . Dire que deux figures ABC, PQR ont le même sens, c'est dire que les deux figures ABC, RQP sont de sens contraires.

§4. Figures en involution

70. Si dans deux figures élémentaires projectives qui coïncident l'une avec l'autre, deux éléments homologues se correspondent mutuellement, tous les autres éléments homologues se correspondent aussi mutuellement, et les deux figures sont dites en involution. On les considère habituellement comme ne formant qu'une seule figure, dont les éléments sont accouplés par involution.

71. Dans une figure en involution AA_1, BB_1, \dots ou bien chaque sens se correspond à lui-même, ou bien il correspond au sens opposé. Dans le premier cas, si le sens ABA_1 coïncide avec le sens correspondant A, B, A , chaque couple d'éléments est séparé par la figure en deux portions correspondantes; chaque autre couple d'éléments homologues est séparé par les éléments du premier couple. Il résulte qu'aucun élément n'est son propre homologue. Dans le second cas, si le sens ABA_1 est opposé au sens A, B, A , aucun couple d'éléments n'est séparé par un autre couple d'éléments homologues; alors la figure contient deux éléments qui se correspondent l'un à l'autre, M, N , et qui par suite sont séparés harmoniquement par deux éléments homologues quelconques.

72. Si deux figures élémentaires ABC, \dots, abc, \dots , sont projectives ou ~~directes~~ en perspective, à chaque involution AA_1, BB_1, CC_1 de l'une correspond une involution aa_1, bb_1, cc_1 de l'autre. Si les deux sont accouplés par involution les éléments de l'une on accouple en même temps les éléments de l'autre par involution; et si les deux figures sont projectives ou en perspective, les deux systèmes involutifs ainsi obtenus seront projectifs ou en perspective.

74. Si un point S est situé dans le plan d'une courbe du second ordre, mais non sur cette courbe, et qu'on fasse correspondre les deux points A, A_1 où un rayon issu du point S rencontre la courbe, les éléments de la courbe seront accouplés par involution, aussi bien les tangentes que les points: car les deux droites a, a_1 tangentes à la courbe en A, A_1 se coupent sur la polaire s du point S et se correspondent par involution. Les points A, A_1 et les droites a, a_1 sont séparés harmoniquement par le point S et la droite s , et forment un système plan involutif dont le point S est le centre d'ordre et la droite s la ligne d'ordre.

Si ~~le point~~ S a deux tangentes issues du p. S , et par suite deux points sur la dr. s , ces points sont les points d'ordre de l'involution des points, et ces tangentes les droites d'ordre de l'involution des rayons. Dans le cas contraire, aucun élément ne se correspond à lui-même dans les deux involutions. Dans tous les cas, S est le centre d'involution et s l'axe d'involution des deux systèmes de points et de rayons.

En projetant cette figure depuis un point pris hors du plan, on obtient une surface conique et un faisceau de plans en involution: la droite MS est l'axe d'involution, le plan Ms le plan d'involution de chacun des deux systèmes.

83. Un jet $abcd$ s'appelle jet ordinaire, si les éléments a, c sont séparés par les éléments b, d . Dans une figure élémentaire en involution qui n'a pas d'éléments d'ordre, à deux éléments homologues PP_1 correspondent deux éléments Q, Q_1 tels que le jet PQP, Q_1 soit projectif au jet ordinaire $abcd$, et que le sens PQP_1 coïncide avec le sens ABA_1 . Il y a aussi deux éléments homologues R, R_1 tels que le jet PRP, R_1 soit projectif à $abcd$ mais que le sens PRP_1 soit opposé au sens ABA_1 .

§7. Éléments imaginaires.

116. Si l'on associe à une figure uniforme en involution AA_1, BB_1, \dots qui n'a pas d'éléments d'ordre, un sens déterminé ABA_1 , contenu dans cette figure, on a un élément imaginaire ABA_1, B_1 de première espèce, c'est-à-dire un point imaginaire, une droite imaginaire ou un plan imaginaire, selon que la figure uniforme est un ensemble de points, un faisceau de rayons ou un faisceau de plans. Si l'on associe à la même figure en involution le sens opposé A_1BA , on obtient l'élément imaginaire $A_1, BABA_1$, qui s'appelle conjugué du premier. De telles associations de deux concepts sont nommées éléments pour cette unique raison qu'ils remplacent souvent des éléments véritables ou réels.

Si l'on parle d'un élément imaginaire de première espèce ABA_1, B_1 , il va de soi que A, B, A_1, B_1 sont quatre éléments réels d'une même figure uniforme, et que dans cette figure les éléments A, A_1 sont séparés par les éléments B, B_1 . L'élément imaginaire E, FE, F_1 coïncide avec le premier, de sorte que ABA_1, B_1, EFE, F_1 ne sont que deux représentations différentes d'un seul et même élément imaginaire, si la figure involutive EE_1, FF_1, \dots coïncide avec la première involutive ABA_1, B_1, \dots et si est identique à la figure en outre le sens EFE_1 coïncide avec le sens ABA_1 . Ainsi l'élément imaginaire ABA_1, B_1 peut être représenté aussi par $BA_1B, A, A_1B, AB, B, ABA_1$, et son conjugué $A_1, BABA_1$, par $BABA_1, A_1, AB, A, B, B_1A, BA$.

117. Étant donné un système ^{de l'espace} en involution aa, bb, \dots qui n'a ni point double, ni plan double (101: geschaart involutorisch) ni lignes doubles, si on lui associe un sens déterminé contenu dans le faisceau réglé aa, bb, \dots on a une droite imaginaire aba, b , ^{involutive} de seconde espèce.

Si l'on associe au même système le sens opposé, on obtient la droite a, bab , conjuguée de la première.

Quand on parle d'une droite imaginaire de seconde espèce aba, b , il est sous-entendu que a, b, a, b sont quatre droites réelles du même faisceau réglé, et que dans ce faisceau les droites a, a sont séparées par les droites b, b .

La droite imaginaire e, f, f coïncide avec la première, de sorte que aba, b, e, f, f ne sont que des représentations différentes d'une même droite imaginaire, si le système involutif ee, ff, \dots est identique au système involutif aa, bb, \dots et si en outre le sens e, f coïncide avec le sens aba . Ainsi la droite imaginaire aba, b peut aussi être représentée par $ba, b, a, a, b, ab, b, aba$, et la droite conjuguée a, bab par $ba, ba, ab, a, b, b, a, ba$.

Il n'y a pas de autres éléments imaginaires que ceux qu'on vient de définir dans ces deux numéros.

118. Les représentations aba, b, e, f, f de deux éléments imaginaires ou d'un seul et même élément imaginaire, sont dites projectives entre elles, si les deux jets aba, b, e, f, f sont projectifs entre eux. Si un élément imaginaire est représenté par un jet harmonique aba, b , cette représentation s'appelle harmonique. Parmi toutes les représentations d'un seul et même élément imaginaire ghg, h qui partent d'un seul et même élément e , il y en a une, et une seule, qui soit

projective à une représentation donnée aba, b_1 , soit du même élément, soit d'un autre élément imaginaire, et par suite un seul, qui soit harmonique.

Si ghg, h_1 est un élément imaginaire de première espèce, à chaque élément réel e qui appartient à la figure uniforme ghg, \dots correspondent trois autres éléments réels e_1, f_1, f_2 , tels que e, e_1, f_1 soit une représentation de l'élément imaginaire ghg, h_1 projective à aba, b_1 .

Si ghg, h_1 est une droite imaginaire de seconde espèce, ~~par~~ chaque droite réelle e qui n'est pas une directrice du système involutif gg, hh, \dots déterminent trois autres droites réelles e_1, f_1, f_2 , telles que e, e_1, f_1 soit une représentation de la droite imaginaire ghg, h_1 projective à aba, b_1 . Toutes les directrices du système involutif gg, hh, \dots qui coupent la droite e appartiennent à un seul et même faisceau réglé, qui est le faisceau directeur (n°3) d'un faisceau réglé involutif ee, ff, \dots qui est contenu dans le système.

119. Un élément imaginaire ABA, B_1 est dit situé dans un élément réel a , si tous les éléments de la figure involutive AA, BB, \dots y sont situés. Tout point imaginaire est donc situé sur une droite réelle⁽¹⁾ et dans tout plan qui passe par cette droite.

Un élément imaginaire ABA, B_1 est dit passer par un élément réel s , si tous les éléments de la figure involutive AA, BB, \dots y passent. Tout plan imaginaire passe donc par une droite réelle⁽²⁾ et par tout point réel situé sur cette droite.

Toute droite imaginaire de première espèce est située dans un plan réel⁽³⁾ et passe par un point réel⁽⁴⁾, tandis qu'une droite imaginaire de seconde espèce ne passe par aucun point réel et n'est située dans aucun plan réel.

(1) le plan du faisceau de rayons en involution qui la représente.
 (2) le centre de ce faisceau (add. de Liouville)
 (3) dit le porteur réel de ce point.
 (4) dite base réel de ce plan.

Si un élément réel passe par l'un de deux éléments imaginaires conjugués, il passe aussi par l'autre.
 Si un élément réel est situé dans l'un de deux éléments imaginaires conjugués, il est aussi situé dans l'autre.

120. On dit qu'un point imaginaire ^{ABA, B₁} est situé dans un plan ^{EFE, F₁} imaginaire, soit quand l'axe réel du plan coïncide avec la droite réelle qui porte le point, soit quand la droite en involution AA, BB, ... et le faisceau de plans en involution EF, FF, ... sont en perspective, et qu'en outre les sens ABA, et EFE, concordent.

Un point imaginaire ABA, B₁, et une droite ^{réelle} s, non situés dans un même plan, déterminent un plan imaginaire s(ABA, B₁).

Un plan imaginaire EFE, F₁, et une droite réelle u, qui n'est aucun point réel commun, se coupent en un p. imag. u(EFE, F₁).

126. Deux points imaginaires situés dans un même plan réel mais non sur une même droite réelle déterminent une droite imag. de 1^{re} esp.

Deux plans imaginaires qui ont en commun un point réel, mais non une droite réelle, déterminent une droite imag. de 1^{re} esp.

Deux droites imaginaires situées dans un même plan réel, mais n'ayant aucun point réel commun, se coupent en un point imaginaire.

Deux droites imaginaires qui passent par un même point réel sans être situées dans un même plan réel, déterminent un plan imaginaire.

127. Deux points imaginaires non situés dans un même plan réel, ou deux plans imaginaires n'ayant aucun point réel commun, déterminent une droite imaginaire de 2^e espèce. (v. Liérot, 21.)

§ 8. 147. Chaque point imaginaire P non situé à l'infini détermine un jet harmonique ABCD, qui est la représentation harmonique à partir du point A situé à l'infini sur la droite réelle qui porte P.
 On pourrait donc représenter le point imaginaire simplement par (B, C) et le point conjugué, qui est représenté harmoniquement, à partir du point à l'infini A, par ADCB, peut être simplement représenté par (D, B). Les 2 points B et D suffisent à déterminer la droite réelle qui porte le point à l'infini A et son conjugué harmonique C.

§ 9. Jets harmoniques.

142. Les trois points d'intersection des couples des côtés opposés d'un quadrilatère plan couples EF, GH sont les trois sommets d'un triangle (même s'ils sont imaginaires.) ⁽¹⁾

La droite qui joint le point d'intersection A des côtés EF, GH ~~avec~~ le point d'intersection C des côtés EH, FG coupe donc, même quand le quadrilatère $EFGH$ est imaginaire, les côtés EG, FH en deux points distincts B, D , et le jet $ABCD$ est harmonique. Si l'on convient de dire encore d'un jet harmonique imaginaire qu'il est 1^{er} et 3^e de ses éléments sont séparés par le 2^e et le 4^e, parce que cela est vrai de tout jet harmonique réel, et n'y a absolument rien à changer aux propositions contenues dans le § 8 de la g. de L. en prenant désormais le concept d'élément dans le sens général.

144. Si $ABCD$ est un jet harmonique, et si A, B, C, D sont les éléments conjugués aux éléments A, B, C, D , le jet A, B, C, D , est aussi harmonique.

145. Deux éléments imaginaires conjugués P, P_1 de première espèce sont séparés harmoniquement par deux éléments correspondants (réels) quelconques A, A_1 de la figure involutive qui leur sert de base.

146. Trois droites a, b, c qui ne se rencontrent pas déterminent une quatrième droite d qui est leur quatrième harmonique.

147. Deux droites imaginaires conjuguées de seconde espèce sont séparées harmoniquement par deux droites réelles correspondantes a, a_1 du système involutif qui leur sert de base.

(1) Cela n'est pas en ligne droite.

148. Quatre éléments $A A_1, B B_1$ d'une même figure uniforme déterminent deux éléments M, N de cette figure qui sont séparés harmoniquement tant par les deux premiers que par les deux derniers des quatre éléments donnés.

Si les éléments donnés sont tous réels, M et N sont deux éléments réels ou imaginaires conjugués, selon que le sens ABA_1 concorde avec le sens AB, A_1 ou lui est opposé. Si A, A_1 sont deux éléments imaginaires conjugués, et si B, B_1 sont deux éléments réels ou imaginaires conjugués, M et N sont réels.

§ 10. Éléments imaginaires homologues dans des figures fondamentales qui sont réellement projectives.

149. Si deux figures uniformes réelles sont en relation projective, à chaque élément imaginaire $ABCD$ de l'une correspond *ipso facto* un élément imaginaire $A_1 B_1 C_1 D_1$ de l'autre, puisqu'à chaque jet ordinaire réel $ABCD$ de l'une correspond un jet ordinaire réel de l'autre. Si $EFGH$ est une autre représentation de l'élément imaginaire $ABCD$, et si $E_1 F_1 G_1 H_1$ est le jet qui correspond au jet $EFGH$, $E_1 F_1 G_1 H_1$ est une autre représentation de l'élément imaginaire $A_1 B_1 C_1 D_1$. A tout jet harmonique imaginaire de l'une des figures correspond un jet harmonique imaginaire de l'autre (car, deux figures projectives ne sont pas en perspective, elles peuvent se déduire l'une de l'autre par deux autres perspectives successives). A deux éléments imaginaires conjugués de l'une correspondent deux éléments imaginaires conjugués de l'autre. Si les deux figures ont un élément imaginaire correspondant commun, elles ont aussi son conjugué correspondant commun. Si un élément imaginaire $PQRS$ correspond à l'élément imaginaire $P_1 Q_1 R_1 S_1$, et si l'élément réel P correspond à l'élément réel P_1 , l'élément R correspond à l'élément R_1 .

et en outre les représentations des deux éléments imaginaires sont projectives entre elles, l'élément Q , correspond à Q' , et S , à S' .

§ 12. Éléments imaginaires dans des figures élémentaires réelles.
 175. Si la surface d'ordre P d'un système polaire réel passe par la droite réelle a et par la droite imaginaire $abcd$, elle passe aussi par les droites réelles b, c, d . Car si au jet $abcd$ correspondait un jet différent ab, c, d , à la droite imaginaire $abcd$ correspondrait une autre droite imaginaire ab, c, d , ce qui est contre l'hypothèse.

Une droite réelle a et une droite imaginaire u , qui ne se coupent pas, déterminent un faisceau réglé réel, qui contient les deux droites données, et qui contient aussi les droites réelles b, c, d , si $abcd$ est une représentation de la droite imaginaire u

176. Une courbe réelle de second ordre K et une droite réelle p , situées dans son plan, mais non tangente, déterminent un ensemble involutif de points AA, BB, \dots . Sur la courbe, dont la droite p est l'axe d'involution et son pôle P le centre d'involution.

Si la courbe K et la droite p se coupent en 2 points imaginaires EFE, F , E, F, E, F , et si le sens ABA, A , concorde avec le sens EFE , le point imaginaire EFE, F peut être représenté, en tant que point de la courbe K , par ABA, B , et le point conjugué par AB, A, B ; et l'on peut dire que l'on obtient l'un ou l'autre de ces points d'intersection de la courbe K avec l'axe d'involution de la figure involutive AA, BB, \dots , selon que l'on associe à cette figure le sens ABA , ou le sens AB, A .

177. Tout élément imaginaire, contenu dans une figure élémentaire réelle, peut être représenté par quatre éléments réels de cette figure, de telle sorte que cette représentation parte d'un élément réel donné de la figure et soit projective à un jet ordinaire donné.

Surfac réglé lieu des droites qui se correspondent à elles-mêmes.

[On peut répéter ici des figures élémentaires ce qui a été dit des figures uniformes n° 149.]

Anhang.

190. Dans une gerbe de rayons rectangulaire, deux éléments correspondants imaginaires seront encore dits perpendiculaires. A chaque rayon imaginaire $aba, b,$ correspond un plan imaginaire $ABA, B,$ dont l'axe réel est perpendiculaire au plan réel qui porte la droite imaginaire. Si les droites $a, b,$ sont respectivement perpendiculaires aux droites $a, b,$, la droite imaginaire est située dans le plan qui lui correspond, de sorte que chacun de ces éléments est aussi perpendiculaire à lui-même. Tout faisceau réel de premier ordre, double centre ou ligne n'est pas la dernière, contient ainsi deux éléments imaginaires conjugués dont chacun est perpendiculaire à lui-même. Ces deux éléments imaginaires conjugués ne sont pas autre chose que les éléments d'ordre deux d'un faisceau rectangulaire (involutif).

191. Si deux faisceaux de rayons congruents $abc... , a, b, c, ...$ situés dans un même plan et ayant leur centre commun (dans le fini) sont décrits dans le même sens, ils ont deux rayons imaginaires conjugués correspondants communs, dont chacun est perpendiculaire à lui-même.

Si l'on fait correspondre entre eux les deux points à l'infini sur deux rayons perpendiculaires, on établit sur la droite de l'infini un système involutif de points; les points d'ordre deux (points doubles) de cette involution sont projetés, depuis tout point réel dans le fini, par deux rayons imaginaires conjugués, dont chacun est perpendiculaire à lui-même; on les appelle points normaux du plan. Si la courbe d'ordre deux d'un système polaire réel du plan contient ces deux points, elle est un cercle; car alors tous ses diamètres conjugués sont perpendiculaires. Les cercles concentriques se touchent aux deux points normaux du plan.

Soient deux systèmes plans semblables ^{soient} situés dans un même plan, mais non en perspective, ils ont en commun un point dans le fini et deux points à l'infini. Et correspondants normaux du plan si les angles homologues sont de même sens, ou deux points réels séparés harmoniquement par les points normaux, si les angles homologues sont de sens contraire.

192. Le faisceau de rayons du second ordre qui forment les tangentes d'une parabole contient deux rayons imaginaires, dont chacun est perpendiculaire à lui-même, et qui se coupent en un point réel, le foyer de la parabole. Si la courbe d'ordre deux d'un système polaire réel plan a deux points à l'infini, et si ces deux points sont les points normaux, la courbe est un cercle car tous ses diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux; sinon, elle a quatre tangentes dont chacune est perpendiculaire à elle-même, les deux points réels de ces quatre droites imaginaires sont les foyers de la courbe.

Des cercles concentriques situés dans un même plan se touchent aux points normaux du plan.

193. Deux faisceaux de rayons congruents, situés dans un même plan engendrent et qui n'ont aucun rayon correspondant commun, engendrent (par les intersections de leurs rayons homologues) soit un cercle soit une hyperbole équilatère, selon qu'ils sont décrits dans le même sens ou en sens contraire.

194. La surface d'ordre deux d'une gerbe de rayons rectangulaire est telle, que toute droite qui y est située et tout plan qui lui est tangent, est perpendiculaire à soi-même. La courbe imaginaire suivant laquelle le plan de l'infini est coupé par toutes les surfaces coniques analogues s'appelle cercle normal. Toute surface du second ordre qui passe par ce cercle et qui n'est pas une surface conique, est une surface sphérique, car tous ses diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux. De plus, toute droite située dans une surface sphérique est perpendiculaire à elle-même.

§ 14. Du sens.

196. Si P, Q, R, S sont quatre éléments d'une même figure uniforme, ou bien S est situé dans le sens PQR (QRP, RPQ) ou bien il est situé dans le sens contraire RQP , ou bien il est neutre par rapport aux deux sens opposés.

197. Deux jets $PQRS, P, Q, R, S$, sont dits de même espèce, à l'égard du sens, quand S se comporte par rapport au sens PQR comme S , par rapport au sens P, Q, R .

Si S est neutre par rapport au sens PQR (ou au sens RQP) le jet $PQRS$ est dit neutre. Le même pour les jets P, Q, R, S .

198. Quand deux systèmes de l'espace sont en relation projective l'un avec l'autre, deux jets homologues quelconques sont de même espèce quant au sens.

204. Si les éléments P, Q, R, S d'une même figure uniforme ont pour conjugués P, Q, R, S , les deux jets $PQRS, P, Q, R, S$ sont de même espèce quant au sens.

205. Si P, Q, R, S sont quatre éléments d'une même figure uniforme, les jets $PQRS, QPSR$ sont de même espèce quant au sens. — ~~Premier~~ Si l'élément S est situé dans le sens PQR , l'élément R est situé dans le sens QPS , Q dans le sens RSP , et P dans le sens SRQ .

§ 15. Des chaînes.

206. Trois éléments P, Q, R d'une même figure uniforme y déterminent une chaîne PQR, \dots qui est l'ensemble de tous les éléments de cette figure qui sont neutres par rapport au sens PQR . 207. Un élément de cette figure qui n'appartient pas à la chaîne PQR, \dots est dit situé d'un côté ou de l'autre de cette chaîne, suivant qu'il est situé dans le sens PQR ou dans le sens RQP .

214. Si deux figures uniformes se correspondent de telle manière qu'à chaque élément de l'une corresponde un élément de l'autre, à chaque jet neutre de l'une un jet neutre de l'autre, et par suite, à chaque chaîne de l'une une chaîne de l'autre, alors à chaque jet harmonique de l'une correspond un jet harmonique de l'autre. Et chaque jet ordinaire de l'une correspond un jet ordinaire de l'autre.

§ 16. Relation projective entre figures uniformes.

215. On dira maintenant que deux figures uniformes sont projectives entre elles, si elles se correspondent de telle manière qu'à chaque élément de l'une corresponde un élément de l'autre, et si de plus deux jets homologues sont de même espèce quant au sens. Il en résulte (214) qu'à chaque jet harmonique de l'une correspondra un jet harmonique de l'autre.

Toutes les propositions du § 9 de la Geom. d. Laze se trouvent étendues aux figures réelles et imaginaires, grâce au sens général du mot élément.

216. Si deux figures uniformes réelles sont projectives, et si à trois éléments réels de l'une correspondent trois éléments réels de l'autre, ces figures sont en relation projective réelle.

§ 17. Relation projective entre des systèmes.

216. Si l'on entend par élément les éléments imaginaires aussi bien que réels, deux figures fondamentales du second degré ou deux systèmes de l'espace ne peuvent être dits projectifs (collinéaires ou réciproques), qu'à non seulement les conditions énoncées (G. d. L. n° 121) sont remplies, mais en outre deux jets homologues uniformes quelconques sont de même espèce quant au sens, et par suite deux figures uniformes homologues sont projectives entre elles. — Il n'y a d'ailleurs rien à changer au § 10 de la Geom. d. L. le mot élément étant pris dans son sens étendu.

§ 18. Relation projective entre figures élémentaires

234. Si P, Q, R, S sont quatre éléments d'une même figure élémentaire du second ordre, et p, q, r, s les éléments correspondants d'une figure uniforme, qui est en perspective avec la première, on convient de dire que l'élément S se correspond à l'égard du sens PQR comme l'élément s à l'égard du sens pqr .

238. Si deux jets sont projectifs, leurs conjugués le sont aussi.

239. Deux jets neutres conjugués $ABCD, A, B, C, D$, sont projectifs. — Si au contraire $ABCF, A, B, C, F$, sont deux jets conjugués non neutres, et si F est séparé de G par la chaîne ABC, \dots et F , du conjugué G , de G par la chaîne A, B, C, \dots harmoniquement, alors les jets $ABCF$ et A, B, C, G , $ABCG$ et A, B, C, F , sont respectivement projectifs.

§ 19. Sommes de jets.

256. Désormais les jets projectifs entre eux seront considérés comme égaux, et l'on dira d'un jet qu'il est déterminé, si l'on donne un jet projectif quelque qui lui est projectif (égal).
Si l'on parle d'un jet propre (eigentlich), on entend par là que les ~~quatre~~ ^{quatre} éléments de ce jet ($abcd$) sont ~~des~~ ^{quatre} éléments distincts d'une même figure élémentaire. L'ensemble de trois éléments différents d'une telle figure, dont un ~~est~~ ^{est} écrit deux fois, s'appellera jet impropre (uneigentlich).

de première espèce :

$abca$, $baac$

de deuxième espèce :

$abcb$, $babc$

de troisième espèce :

$abcc$, $ccab$

Bien que les jets $ABCA$, $baac$ ne soient pas projectifs, tous les jets impropres de même espèce seront considérés comme égaux et représentés, ceux de première espèce, par 0 ;
ceux de deuxième espèce, par 1 ;
ceux de troisième espèce, par ∞ .

Tout jet impropre est un jet neutre.

257. Tout jet neutre est conjugué à lui-même (239.)

Quel que soit le jet $ABCD$, on a identiquement :

$$ABCD = BADC = CDAB = DCBA. \quad (2h.)$$

258. Si l'on donne deux jets V et V_1 , et trois éléments ABC d'une figure élémentaire, on détermine trois autres éléments D , D_1 , et S , tels que l'on ait :

$$ABCD = V, \quad ABCD_1 = V_1,$$

et que dans la figure involutive $CC.DD_1, \dots$ l'élément S corresponde à l'élément A . Les jets $ABCS$ ainsi obtenus

sont la somme des jets $ABCD$, $ABCD_1$, c'est-à-dire $V + V_1$.

Les deux jets V et V_1 déterminent un seul jet : $V + V_1$.

Notamment que : $V + V_1 = V_1 + V$

Si D coïncide avec A , S coïncide avec D_1 . Donc quand l'un des deux jets est égal à 0 , leur somme est égale à l'autre.

260. Si les jets V_1, V_2, \dots, V_n sont les conjugués des jets V_1, V_2, \dots, V_n , la somme des n V est conjugué à la somme des n V .

La somme de jets neutres est un jet neutre.

La somme de deux jets conjugués est un jet neutre.

261. Deux jets V, V_1 déterminent un jet V_2 tel que :

$$V = V_1 + V_2$$

Qu'on prenne dans une figure ^{éléments} AB, C , et qu'on cherche les ^{éléments} S, D, E tels que :

$$ABCS = V,$$

$$ABCD = V_1$$

et que l'élément E corresponde à D dans l'involution CC, AS, \dots . Si l'on pose : $ABCE = V_2$, on a :

$$ABCS = ABCD + ABCE \quad \text{ou : } V = V_1 + V_2.$$

Le point E , et le jet $ABCE$, est d'ailleurs le seul.

Si V et V_1 sont neutres, V_2 est un jet neutre.

Si $V_1 + V_2 = V_1 + V_2$, et si : $V_1 = V_1, \quad V_2 = V_2$.

262. La somme de deux jets $ABCD, BACD$, dont l'un se réduit de l'autre par la permutation des deux premiers ou des deux derniers éléments, est un jet impropre de seconde espèce ($= 1$).

Si dans l'involution CC, AB, \dots les éléments D, E sont correspondants, $ABCD + ABCE = ABCB = 1$; or :

$$ABCE = BACD = ABDC.$$

263. Deux jets dont la somme est égale à zéro sont dits opposés. Si CC, BD, AE est une involution, $DECA + EDCB = ABCE = 0$.

263. Soit donnée une involution CC, BD, AE et un P . Prenons la même figure, on a : $ABCP + EDCP = ABCE = EDCA$,
 $ABCP = EDCP + ABCD = EDCP + EDCB$.

266. La somme de m jets dont chacun est égal à V , s'appelle un multiple de V et s'écrit: mV .

267. Trois éléments réels C, A, A_1 d'une figure élémentaire réelle G déterminent une suite d'éléments A_2, A_3, A_4, \dots tels que $CAA_2, CA_2A_3, CA_3A_4, \dots$ soient des jets harmoniques, et tels que deux éléments consécutifs de la suite, soient qu'on la prolonge, ne soient jamais séparés dans G par des éléments intérieurs. Si B est un élément quelconque distinct de A , on a:

$$ABCA_m = m(ABCA_1)$$

Si l'on détermine l'élément B de telle sorte que $ABCA_1 = V$, on aura:

$$ABCA_m = mV.$$

Le jet AA_1CA_m est égal à m fois le jet $\frac{1}{AA_1CA_1}$ ou à m ; le jet 1 est égal à m fois le jet AA_mCA_1 (car $AA_mCA_m = 1$).

§ 20. Produits de jets.

268. Trois éléments M, A, N d'une figure élémentaire et deux jets V_1, V_2 dont aucun n'est égal à 0 ou à ∞ , déterminent deux éléments A_1, A_2 de la figure, de telle que:

$$MANA_1 = V_1$$

$$MANA_2 = V_2$$

Le jet $MANA_2$ s'appelle le produit des jets V_1, V_2 , et s'écrit: $V_1 \cdot V_2$.

Le jet V_1, V_2 est bien déterminé (d'une façon unique) par les jets V_1, V_2 .

$$V_2 V_1 = NA_2 MA = MANA_2 = V_1 V_2.$$

Si l'un des facteurs est égal à 1 (jet impropre de deuxième espèce) le produit est égal à l'autre.

269. Produit de n jets V_1, V_2, \dots, V_n (dont aucun n'est nul ou infini).

$$MANA_1 = V_1 \quad MANA_2 = V_2 \quad \dots \quad MAN_{n-1}A_n = V_n$$

$$MANA_n = V_1 V_2 \dots V_n.$$

Si l'un des facteurs est égal à 0 (jet impropre de première espèce) le produit est égal à 0.

- Si les jets $U, U_2 \dots U_n$ sont les conjugués des jets $V, V_2 \dots V_n$,
 le produit des premiers est le conjugué du produit des seconds.
 Tout produit de jets neutres est lui-même un jet neutre.
270. Si le produit de deux jets est égal à 1, chacun est dit
 l'inverse de l'autre. $MANA$, a pour inverse MA , $NA = NAM_A$.
 Si deux jets inverses sont égaux, ils sont tous deux ou bien
 des jets impropres de deuxième espèce (+1) ou bien des jets harmoniques
 (-1).
271. Deux jets U, V , dont le second n'est pas égal à 0, déter-
 minent un jet U_2 , tel que: $V = U_1 \cdot U_2$.
272. Si $MN.AD.BC$ est une involution, c'est-à-dire: $MANC = NDMB =$
 $MBND$, on a: $MANB \times MANC = MAND$.
- Le m^{e} multiple $ABCA_m$ d'un jet $ABCA$, est le produit de
 ce jet par le jet AA, CA_m qui est égal à m fois le jet 1.
273. Le produit de deux jets conjugués U, V est un jet neutre.
274. Deux jets donnés U, V déterminent deux jets $ABCP, ABCQ$
 dont la somme est égale à U et le produit égal à V .
277. Si U, V, U_1, V_1 sont des jets neutres, et J un jet non neutre,
 on a: $U + VJ = U_1 + V_1J$, on a: $U = U_1$ et $V = V_1$.
278. Un jet non neutre J et un jet quelconque W déterminent
 deux jets neutres U, V tels que: $W = U + VJ$.

§ 21. Puissances de jets.

279. Le produit de m jets égaux à V s'appelle la m puissance de V et s'écrit : V^m .

Toute puissance de 0 est 0 ; de 1 est 1 ; deux jets neutres est un jet neutre.

280. Si $MN.AC.BB$ est une involution, on a :

$$(MANB)^2 = MANB \times MBNC = (MBNC)^2 = MANC.$$

Si $MANB$ est un jet harmonique, $(MANB)^2 = 1$.

Le produit d'un jet harmonique $ABCD$ par un jet quelconque $ABCP$ est l'opposé (le symétrique) de celui-ci.

281. Si $MANA_1$ est un jet propre et neutre, tels que les éléments M, N ne soient pas séparés par A, A_1 , aucune puissance de ce jet n'est égale à une autre, ni par suite égale à 1.

282. Si une puissance quelconque V^m d'un jet V est égale à 1, le jet V conjugué de V est en même temps son inverse.

283. A chaque jet $MANC$, non nul, correspondent deux jets opposés $MANB, MANB_1$, tels que : $(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC$.

284. Si M, N, A, B, A_1, B_1 sont six points d'une courbe de second ordre, et S le point d'intersection des droites AA_1, BB_1 , le jet $S(MANB)$ est le produit des 2 jets contenus dans la courbe : $MANB, MA_1NB_1$.

En effet, soient A_2, B_2, C les points où MN coupe AA_1, BB_1, A_1B_1 .

$S(MANB) = MA_2NB_2 = MA_2NC \times MCNB_2$. Or on voit que :

$$MA_2NC = A_1(MANB) = MANB, MCNB_2 = B_1(MA_1NB_1) = MA_1NB_1.$$

285. A chaque jet neutre V non nul correspondent un jet neutre V et deux jets non neutres conjugués V_1, V_2 tels que : $V = V_1^3 = V_2^3 = V$.

290. A chaque jet non neutre V , qui est le inverse de son conjugué, correspondent 3 jets de même nature V, V_1, V_2 , tels que :

$$V^3 = V_1^3 = V_2^3 = V.$$

291. A tout jet non nul V correspondent 3 jets V, V_1, V_2 , tels que :

$$V^3 = V_1^3 = V_2^3 = V.$$

§ 22. Points et tangentes communs à deux courbes du second ordre.

297. Dans chaque figure élémentaire, trois éléments A, B, C en déterminent deux autres P, Q tels que $ABPQ, CBQP$ soient des jets harmoniques.

§ 27. De la valeur des jets neutres.

393. Chaque jet neutre $abcd$ détermine un nombre, qu'on peut appeler sa valeur. Étant donnés 2 points réels et propres A, B et le point à l'infini C sur cette droite, AB , on cherche le point D tel que $ABCD \propto abcd$, on considère le quotient $\frac{AD}{AB}$ comme positif ou négatif, suivant que les segments finis AB, AD sont de même sens ou de sens contraires, le nombre déterminé s'appellera la valeur du jet $abcd$.
Si $abcd$ est un jet neutre et propre, sa valeur sera négative, si dans la chaîne $abc \dots$ les éléments a, c sont séparés par b, d , positive et < 1 , si les éléments a, b sont séparés par c, d , positive et > 1 , si les éléments a, d sont séparés par b, c .
Si $abcd$ est un jet impropre, il a pour valeur 0, 1 ou ∞ , suivant que le point D coïncide avec A , avec B ou avec C .
394. Deux jets neutres et propres ont des valeurs égales ou inégales, suivant qu'ils sont projectifs ou non. Si un jet est la somme de jets neutres, sa valeur est la somme arithmétique de leurs valeurs.

si un jet est le produit de jets neutres, sa valeur est le produit arithmétique de leurs valeurs.

395. Si A, B, C, D sont quatre points réels propres d'une droite, la valeur du jet $ABCD$ est: $\frac{AD}{AB} \cdot \frac{CB}{CD}$ (ou: $\frac{AD}{AB} : \frac{CD}{CB}$).

396. Si a, b, c, d sont quatre droites réelles situées dans un même plan et passant par un même point S à distance finie (propre), on a: $\underline{abcd} = \pm \frac{\sin(ad) \sin(cb)}{\sin(ab) \sin(cd)}$

on le signe — ou + suivant que les droites a, c sont séparées, ou non, par les droites b, d .

397. La valeur de tout jet harmonique est -1 .

Le jet dont la valeur est q a pour opposé le jet dont la valeur est $-q$.

§ 28. Nombres complexes.

398. Un jet $MANB$, dont le carré est un jet harmonique (égal à -1) sera désigné par $+i$ ou $-i$, suivant que son 4^e élément B est situé dans le sens MAN ou dans le sens NAM . En effet, si $MANC$ est un jet harmonique, les éléments de ordre ~~de~~ B, B_1 de la révolution: MN, AC, \dots sont situés de côtés opposés de la chaîne MAN, \dots . Si donc B se trouve dans le sens MAN , B_1 se trouvera dans le sens NAM , et l'on aura: $MANB = +i$, $MANB_1 = -i$;

$$(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC = -1.$$

399. Tout jet W non égal à ∞ détermine deux jets neutres U, V tels que: $W = U + Vi$ (278). Si u est la valeur de U , v la valeur de V , la valeur de W sera: $u + vi$.

C'est le nombre complexe qui correspond au jet W .
Quand $v \neq 0$, il s'appelle nombre imaginaire. Quand $v = 0$, il se réduit au nombre réel u .

400. Pour construire un jet dont la valeur soit égale à $u+vi$, on marque deux points réels et propres A, B, le point à l'infini C sur la droite AB, et l'on cherche les points D, F, F₁, tels que:

$$\frac{AD}{AB} = u, \quad \frac{DF}{AB} = v, \quad \frac{DF_1}{AB} = -v$$

Si l'on désigne par P le point imaginaire qui a pour représentation harmonique DFCF₁, et par P₁ le point conjugué CFDF₁, on a: $ABCP = u+vi$, $ABCP_1 = u-vi$.

En effet, soit E le point homologue de A dans l'involution CC.BD... on a: ⁽²⁶³⁾ $ABCP = ABCD + DECP = ABCD + (DECF)(DFCP)$

Or: $ABCD = \frac{AD}{AB} = u$, $DECF = \frac{DF}{DE} = \frac{DF}{AB} = v$ $DFCP = i$

Donc: $ABCP = u+vi$. De même: $ABCP_1 = ABCD + (DECF_1)(DF_1CP_1) = u-vi$

401. Les propositions établies n° 394 pour les jets neutres sont aussi valables pour les jets non neutres, si l'on considère les nombres complexes comme des binômes, que l'on associe, dans l'addition, les parties semblables, et que l'on remplace, dans la multiplication, i^2 par sa valeur -1. On a donc (259, 269, 274):

$$(u+vi) + (u_1+v_1i) = (u+u_1) + (v+v_1)i$$

$$(u+vi)(u_1+v_1i) = (uu_1 - vv_1) + (uv_1 + u_1v)i$$

402. Soient B, Q, R trois points réels d'un cercle. L'un des deux points imaginaires M ou le cercle coupe la droite de l'infini est dans le sens BQR; l'autre N dans le sens BRQ. Si l'on désigne l'arc BQ par φ , la valeur du jet MBNQ est:

En effet, soit A le centre du cercle, C le point à l'infini sur AB, CF₁DF₁ la représentation harmonique du point imaginaire P sur la dr. AB coupe la dr. AM; DQ est perpendiculaire à AB: on a FD = DQ = DF, donc $\frac{AD}{AB} = \cos \varphi$, $\frac{DF}{AB} = \sin \varphi$. Or:

$$MBNQ = M(MBNQ) = ABCP = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad [400]$$

Si l'on désigne par ψ l'autre arc QR , la valeur du jet $MQNR$ est :

$$\cos \psi + i \sin \psi$$

et la valeur du jet $MBNR$ sera :

$$\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)$$

Or, $MBNR = MBNQ \times MQNR$. Donc.

$$\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi)$$

403. Si $ABCD$ est un jet propre ayant pour valeur q , nombre réel ou complexe, on a :

$$BACD = 1 - q, \quad CBAD = \frac{1}{q}, \quad BCAD = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q},$$

$$CABD = \frac{1}{1-q}, \quad ACBD = \frac{q}{q-1}.$$

§ 29. Des abscisses.

404. Si l'on prend dans une figure élémentaire 3 éléments A, B, C , que l'on pose 0 pour abscisse du premier, 1 pour abscisse du second, ∞ pour abscisse du troisième, on entend par abscisse d'un quatrième élément P de la figure la valeur du jet $ABCP$. — Les trois éléments fixes déterminent ainsi un système d'abscisses (A, B, C) contenu dans la même figure. Si dans ce système l'abscisse de P est x , elle sera dans le système (B, A, C) : $1-x$, dans le système (C, B, A) : $\frac{1}{x}$, etc.

405. Si P_1, P_2, P_3, P_4 sont quatre éléments quelconques d'une figure élémentaire, x_1, x_2, x_3, x_4 leurs abscisses, la valeur du jet $P_1 P_2 P_3 P_4$ est :

$$\frac{x_1 - x_4}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}$$

En effet, $ABCP_1 \times APCP_4 = ABCP_4 = x_4$, $ABCP_1 = x_1$, donc $APCP_4 = \frac{x_4}{x_1}$;
 $PACP_4 = \frac{x_1 - x_4}{x_1}$, $PACP_2 = \frac{x_1 - x_2}{x}$, $PACP_4 = PACP_2 \times P_2 P_3 P_4$, donc :

$$P_2 P_3 P_4 = \frac{x_1 - x_4}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Si } x_1 = 0, \\ P_1 P_2 P_4 = \frac{x_2}{x_4} \\ \text{Si } x_1 = \infty, \\ P_1 P_2 P_4 = 1. \end{array} \right.$$

106. Si l'on prend dans une figure élémentaire deux systèmes d'abscisses (A, B, C) et (E, F, G) , a, b, c étant les abscisses des éléments A, B, C dans le second, et e, f, g les abscisses des éléments E, F, G dans le premier; soient x l'abscisse d'un élément P dans le premier, y son abscisse dans le second, on a:

$$x = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{y-a}{y-c}, \quad y = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{x-e}{x-g}$$

En particulier:

$$e = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{a}{c}, \quad f = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{1-a}{1-c}, \quad g = \frac{b-c}{b-a}$$

$$a = \frac{f-g}{f-e} \times \frac{e}{g}, \quad b = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{1-e}{1-g}, \quad c = \frac{f-g}{f-e}$$

Trois éléments E, F, G d'une figure élémentaire et trois nombres complexes, e, f, g donnés déterminent dans cette figure un système d'abscisses (A, B, C) par rapport auquel les abscisses de E, F, G sont respectivement e, f, g . Soit x l'abscisse d'un élément quelconque P , et y la valeur du jet $ETGP$, on a:

$$y = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{x-e}{x-g}$$

d'où:
$$x = \frac{gy(f-e) - e(f-g)}{(f-e)y - (f-g)}$$

107. Étant donnés deux figures élémentaires, et dans chacune un système d'abscisses quelconque; soit x l'abscisse d'un élément P de la première, x_1 l'abscisse d'un élément P_1 de la seconde. Si l'on fait correspondre les deux points P et P_1 , dont les abscisses vérifient l'équation:

$$\alpha x x_1 - \beta x - \gamma x_1 + \delta = 0 \quad (\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0)$$

les deux figures sont en relation projective.

En effet, si l'on prend de la 1^{re} fig. les éléments A_1, B_1, C_1 qui ont pour abscisses $\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\beta-\delta}{\alpha-\gamma}, \frac{\beta}{\alpha}$, $A, B, C, P_1 = \frac{\gamma x_1 - \delta}{\alpha x_1 - \beta} = x$. Les jets $ABCP, A_1 B_1 C_1 P_1$ sont égaux, donc les fig. sont projectives ($ABC \dots A_1 B_1 C_1 \dots$)

108. Si deux figures élementaires situées l'une dans l'autre sont en relation projective, de telle sorte que aux éléments ABC de la 1^{re} correspondent les éléments $A_1 B_1 C_1$ de la 2^e ayant pour abscisses, dans le système (A, B, C) les nombres: $\frac{\delta}{\alpha}, \frac{\beta - \delta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}$, si x, x_1 sont les abscisses (dans le même système) de deux points homologues P, P_1 , on a: $x_1 = \frac{\beta x - \delta}{\alpha x - \gamma}$ donc:

$$\alpha x x_1 - \beta x - \gamma x_1 + \delta = 0 \quad (\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0.)$$

Si: $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta > 0$, les deux figures ont 2 éléments correspondants communs.

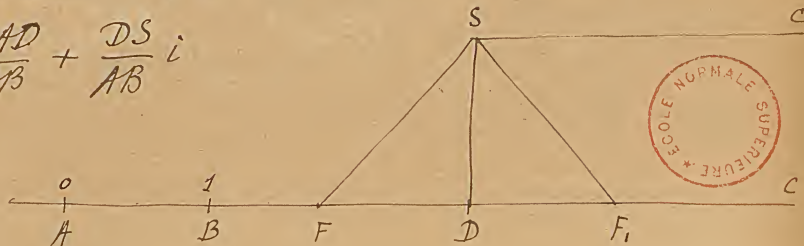
Si: $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta = 0$ (sans qu'aucun des nombres $\alpha, \beta + \gamma, \delta$ soit nul) les deux figures ont 1 élément correspondant commun.

Si: $\alpha = \beta + \gamma = \delta = 0$, les deux figures ont tous leurs éléments communs et correspondants.

Pour que les figures soient en involution, il faut et il suffit que: $\beta = \gamma$.

110. Si l'on prend sur une droite h pour point O le point A , pour point 1 un autre point B , et pour point C le point à l'infini; et si l'on considère, dans un plan H passant par cette droite, l'un des points normaux (circulaires) MP , chaque point P de la droite détermine un point S du plan situé sur la droite MP . Si P est réel, S coïncide avec P ; si P est imaginaire, S est d'un côté ou de l'autre de la droite h , suivant que P est de le sens ABC ou BAC . Soit CF, DF la représentation harmonique de P , issue de C , et (CF, DF) la représentation harmonique de la droite imaginaire SM (perp. à elle-même), la droite SD (perp. à SC et à H) est bissectrice de l'angle droit $F_1 S F$, donc: $F_1 D = DS = DF$. L'abscisse de P est:

$$\frac{AD}{AB} + \frac{DF}{AB} i = \frac{AD}{AB} + \frac{DS}{AB} i$$



Soient P, P_1, Q, Q_1 quatre points de la droite h ; S, S_1, T, T_1 les quatre points correspondants du plan H (points réels des droites imaginaires MP, MP_1, MQ, MQ_1).

Si PP_1, QQ_1 appartiennent à un même faisceau (cà d. leur rapport anharmonique: $\frac{(p-q_1)(q-p_1)}{(q-q_1)(p-p_1)}$ est un n. réel) S, S_1, T, T_1 sont sur une droite ou sur un cercle (PP_1, QQ_1, T, T_1).

411. Quatre points A, B, C, C_1 d'un plan (dont 3 q'q' ne sont pas en ligne droite) déterminent un système de coordonnées plan. Tout point P extérieur à la dr. CC_1 est déterminé par ses deux rayons vecteurs issus de C et C_1 . Les coordonnées sont les valeurs des jets: $c_1(ABCP), c(ABC_1P)$.

Cinq points A, B, C, C_1, C_2 (dont 4 q'q' ne sont pas dans un même plan) déterminent un système de coordonnées d'espace. Les droites $C_1C_2 = c, C_2C = c_1, CC_1 = c_2$ sont les axes de projection du système. Tout point P extérieur au plan CC_1C_2 est déterminé par les 3 plans projectants ~~passant par~~ les droites c, c_1, c_2 (PC, PC_1, PC_2). Les coordonnées sont les valeurs des jets:

$$c(ABCP), c_1(ABC_1P), c_2(ABC_2P)$$

qui déterminent ces 3 plans. Le point A est le point O (origine); le point B a pour coordonnées $1, 1, 1$. Si les 3 points sont réels, et si les 3 derniers sont à l'infini, on a le système ordinaire (cartésien).

De même cinq plans A, B, C, C_1, C_2 (dont 4 q'q' ne passent pas par un même point) déterminent un système de coordonnées pour 4 plans. Si l'on désigne les droites C_1C_2, C_2C, CC_1 par c, c_1, c_2 , les coordonnées d'un plan P qui ne passe pas par le point C (CC_1C_2) sont les valeurs des jets: $c(ABCP), c_1(ABC_1P), c_2(ABC_2P)$ qui déterminent le plan P par les 3 points où il coupe les droites c, c_1, c_2 .

TT

π

us
n
v

r
e
n
u
PC

7;
i
t
to
us
m

i
to

Lüroth -
Les imaginaires en Géométrie

Des Imaginaires in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln
Darstellung und Erweiterung der v. Staedt'schen Theorie,
von J. Lüroth in Carlsruhe.

ap. Mathematische Annalen, t. VIII (1875)

La nécessité de généraliser les théorèmes et de lever les exceptions justifie les nombres imaginaires comme précédemment les nombres fractionnaires, négatifs et irrationnels (cf. Pappus aux Beiträge de Staedt) [Cette nécessité manque pour justifier l'introduction des quaternions.]

La Géométrie analytique admet les valeurs imaginaires au même titre que les valeurs réelles, et continue à leur donner les mêmes noms géométriques. Mais ce n'est plus de la Géométrie proprement dite, puisque ces valeurs imaginaires manquent de ^{figures} représentation réelles qui les représentent. Il faut trouver des figures géométriques qui puissent servir de substratum réel aux points, droites, etc. imaginaires.

D'autre part, la Géométrie pure doit aussi inventer des figures imaginaires, pour atteindre à la même généralité que la Géométrie analytique. Il semble qu'elle ait pour cela plus de liberté que celle-ci (car, analytiquement, un point imaginaire ne peut être représenté que par l'ensemble de 6 nombres réels). Mais il faut que les points, droites et plans imaginaires, conservent l'analogie avec les points, droites et plans réels, de manière à en généraliser les propriétés et à ne pas craindre de nouvelles exceptions: ainsi trois plans doivent déterminer un point, et trois points un plan, etc. Il faut ensuite se demander si les imaginaires introduits suppriment les exceptions dans la théorie de la projectivité, des coniques, etc. et fournissent des résultats concordants avec ceux des imaginaires de la Géométrie analytique.

La seule interprétation des imaginaires en Géométrie qui ait
réussi est celle de r. Staudt. Il emploie des involutions sans
éléments de ordre, leur assigne un sens et leur donne le nom
de point, droite ou plan imaginaire. C'est proprement une
théorie des involutions dans l'espace: chaque théorème peut
s'exprimer de telle sorte qu'il ne soit question que d'éléments réels.
r. Staudt a montré que l'introduction de ces imaginaires dans
la théorie des coniques et de la relations projectives ~~supprime~~
les exceptions auxquelles donne lieu l'emploi exclusif d'éléments
réels, et s'accorde avec les résultats de la Géométrie analytique.

La méthode de Staudt conduit, dans la théorie des courbes
algébriques de ordre supérieur au second, aux mêmes résultats
que l'analyse. M. Stolz (Mathematische Annalen, t. IV, p. 114)
~~il~~ ^{il} a démontré qu'on peut représenter les éléments imaginaires
introduits par Staudt par des systèmes de nombres complexes,
et que les propriétés telles que « un point est situé dans un plan »
s'expriment par les relations connues entre les nombres complexes.
Pour prouver la même chose géométriquement, on peut
partir de la définition d'une courbe algébrique, donnée par
Grassmann (Ausdehnungslehre, 1862.)

Gf August: Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie.
Programm der Friedrichs Realschule zu Berlin, 1872.

I L'imaginaire en Géométrie

§1 Les deux figures Involutions

1. Toute figure uniforme (droite, faisceau de rayons ou de plans) ou du second ordre (conique, faisceau de rayons ou de plans du 2^e ordre propre réglée) ~~peut être~~ ^{est une} figure fermée qu'on peut imaginer ~~devenir~~ ^{engendrer} par le mouvement d'un de ses éléments. D'où deux sens opposés:

ABC et CBA . La figure étant fermée, $ABC = BCA = CAB$, $CBA = BAC = ACB$.

2. ^{Les sens} Deux figures en relation projective, il y a deux sens qui se correspondent deux à deux: Si A, B, C ont pour homologues A_1, B_1, C_1 , le sens A_1, B_1, C_1 correspond au sens ABC ; les sens inverses se corresp. aussi. Si les deux figures sont l'une dans l'autre, les deux sens correspondants sont ou concordants ou opposés.

3. Dans une involution (relation projective réciproque de deux figures confondues) AA_1, BB_1, CC_1, \dots , le sens ABA_1 est opposé au sens homologue A, B, A , les éléments AA_1 ne sont pas séparés par les éléments BB_1 . Il y a donc deux éléments d'ordre (doublets) homologues qui sont séparés harmoniquement par tout couple de l'involution. Au contraire les sens homologues ABA_1 et A, B, A concordent, les couples AA_1 et BB_1 sont séparés l'un par l'autre, et il n'y a pas de doublets c'est-à-dire qu'il n'y a pas de sens propres homologues.

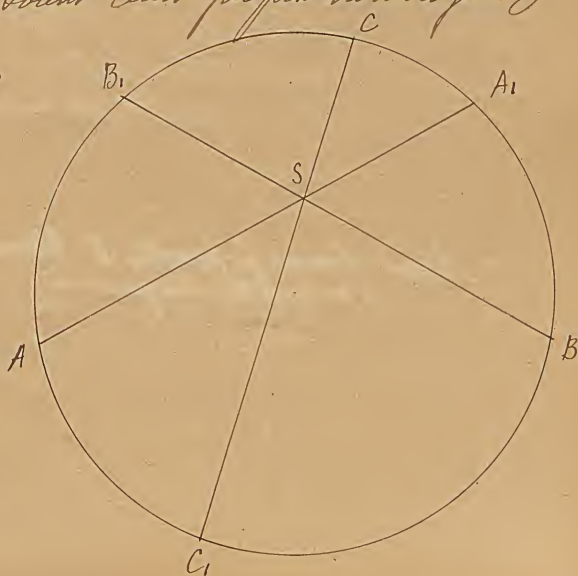
4. Si les points d'une conique sont en involution, il y a un point S qui se trouve en ligne droite avec tout couple de points homologues.

1. $CC_1, A, B \propto C, CAB, \propto CC_1, B, A$

2. $A(CC_1, A, B) \propto B(CC_1, B, A)$

2 faisceaux sont perspectifs, et que les rayons homologues AA_1 , se coupent encore sur CC_1 (en S)

de l'involution (v. Beiträge, 74.)



§ 2. Les éléments imaginaires de première espèce.

5. Si l'on considère une involution sans éléments d'ordre commun engendrée par un couple d'éléments homologues réels, ils se déplacent dans le même sens. On peut donc dans ce cas parler du sens dans lequel ~~est décrite~~ l'involution, ou brièvement du sens de l'involution ^{on suppose}.

Si l'on attribue à une telle involution un sens déterminé (dans lequel on la suppose décrite) on obtient un élément imaginaire de première espèce. Une même involution peut donner lieu à deux éléments imaginaires conjugués, suivant le sens qu'on lui attribue.

6. Une involution étant déterminée par 2 couples d'éléments, un élément imaginaire est défini par 2 couples d'éléments réels qui se séparent mutuellement, quand on donne leur sens.

Exemple: étant donnés 2 couples AA_1, BB_1 , on obtient les deux éléments imaginaires conjugués ABA, B_1 et A_1, BAB_1 .

§ 3. Combinaison des éléments imaginaires.

(v. Beiträge, n° 120) 7. Un point imaginaire est situé sur une droite imaginaire de 1^{re} espèce quand les involutions qui les représentent sont en perspective. La droite réelle qui porte le point se trouve alors dans le plan réel qui passe par la droite.

Une droite de 1^{re} espèce est située dans un plan imaginaire quand les involutions qui les représentent sont en perspective. Le point réel de la droite se trouve alors sur l'axe réel du plan. Si deux éléments imaginaires sont l'un dans l'autre, leurs conjugués sont aussi l'un dans l'autre.

8. Étant donnés 2 points, ils déterminent toujours une droite. Si elle est réelle, elle est le porteur réel du point imaginaire. Si elle est imaginaire, son point réel est le point donné; son plan réel est déterminé par ce point et par le porteur réel du point imaginaire. Elle est donc représentée par le faisceau de rayons réels qui a pour centre le point réel, et pour section l'involution qui représente le point imaginaire rectiligne. (Le faisceau et le porteur réel des points sont en involution et en perspective.)

Si deux points imaginaires sont sur la même droite imaginaire (des conj.) le plan réel de cette droite doit contenir les 2 projecteurs réels de ces points; donc ceux-ci doivent se couper. Ces deux droites en involution déterminent

un faisceau en involution situé en perspective avec elles.

Si G, H, G_1, H_1 est une repré-

sentation de l'un des points imaginaires, G, H, G_1, H_1 une

représentation de l'autre, g, h, g_1, h_1 sera une représentation de la droite imaginaire qui les contient. H. Etant donné un couple AA_1 d'une involution sans éléments doubles, on peut en trouver un autre BB_1 tel que: $ABA_1, B_1 \propto GHG_1, H_1$ et que le sens ABA_1 soit un sens donné. (Beiträge n° 83)

Étudier de nouvelles le cas où l'involution se trouve sur une conique, tous les autres se ramenant par projection à celui-là. Soit M le centre de cette involution; on détermine sur $[AMA_1]$ la droite

le point N tel que $AMA_1, N \propto GHG_1, H_1$

M est à l'intérieur de la conique, puisque l'involution n'a pas d'éléments doubles; d'autre part, GG_1 et HH_1 se séparent mutuellement; donc aussi AA_1 et MN , de sorte que N est extérieur à la conique. Menons les 2 tangentes NC_1, ND_1 . On a (vus de C_1 ou de D_1):

$AMA_1, N \propto ACA_1, C_1 \propto ADA_1, D_1$

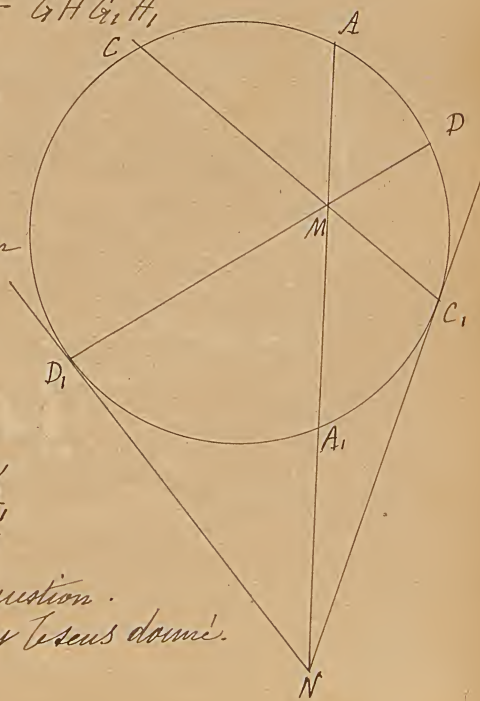
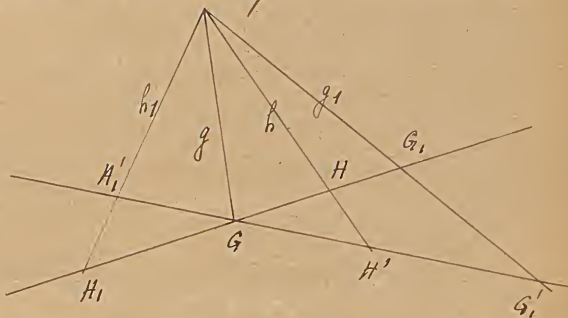
Puisque AA_1 sépare C, D_1, CC_1, DD_1 ,

ils séparent aussi CD ; donc les sens $ACA_1,$

ADA_1 sont opposés. L'un des deux jets

ACA_1, C_1, ADA_1, D_1 répond donc à la question.

Le couple cherché est CC_1 ou DD_1 , suivant le sens donné.



Si $GH, H,$ est un 3^e harmonique, CG et DD_1 coïncident car C, D_1 sont par M . L'un des deux 3^e AG, A, D_1, AD, A, G répond à la question, car il possède le 3^e demandé.

12. En particulier, étant donné un couple AA_1 dans une involution sans éléments d'ordre, on peut trouver un second couple BB_1 tel que soit harmonique au premier; les deux éléments imaginaires conjugués ont pour représentation harmonique: ABA_1, B_1, AB_1, A_1, B . Il suffit des trois premiers éléments pour déterminer chacun d'eux (au même de $delux$ en prenant pour A le point à l'infini.)

13. Si 2 points imaginaires sont sur une droite réelle, leurs porteurs réels coïncident avec cette droite.

Deux points situés dans un même plan réel sont toujours sur une droite réelle ou imaginaire de 1^e esp.

Deux plans qui passent par le même point réel se coupent suivant une droite réelle ou imaginaire de 1^e esp.

Deux droites situées dans un même plan se coupent en un point réel ou imaginaire.

Deux droites qui passent par un même point réel sont contenues dans un plan réel ou imaginaire.

14. Un point et une droite sont situés l'un dans l'autre ou déterminent un plan.

Un plan et une droite sont situés l'un dans l'autre ou déterminent une droite.

Deux droites qui ont un point imaginaire commun sont situées dans un même plan.

Deux droites situées dans un même plan imaginaire ont un point commun.

§ 4. Lemme

15. Deux plans ne déterminent une droite de 1^e espèce que si leurs axes réels se coupent. On voudrait pouvoir dire, en général, que deux plans se coupent suivant une droite, et que deux points déterminent une droite.

Étant donnée sur une conique une involution sans éléments de ordre et de sens déterminés, si on la projette depuis 2 points M et N de la conique sur une droite p on obtient une même involution (en situation et en sens), p est la polaire du centre d'involution, et en projetant l'involution sur p depuis un autre point q que de la conique on obtient encore la même involution, dans laquelle deux points homologues sont conjugués par rapport à la conique (c'est-à-dire que chacun d'eux est sur la polaire de l'autre. v. St. 239.)

§ 5. La droite de seconde espèce.

16. Soient donnés deux plans imaginaires, ^{A, B} tous les axes réels (p, q) ne se coupent pas; on va chercher le système de leurs points communs.

I. Les porteurs réels des points imaginaires situés à la fois dans deux plans imaginaires A, B , forment un système de rayons de 1^{er} ordre et de 1^{re} classe.

II. Les axes réels des plans imaginaires qui passent à la fois par deux points imaginaires A, B , forment un système de rayons de 1^{er} ordre et de 1^{re} classe.

17 (Suite). I. Les rayons de ce système sont les axes des plans imaginaires qui passent par les 2 points A', B' où les droites p et q rencontrent respectivement les plans B et A .

II. Les rayons de ce système sont les porteurs des plans imaginaires qui se trouvent dans les plans B' et A' que déterminent respectivement A et q , B et p .

18. I. Tout plan qui passe par les 2 points A', B' passe par tous les autres points communs aux plans A et B .

II. Tout point ~~réel~~ commun aux 2 plans A', B' est situé dans tous les autres plans qui passent par les points A et B .

I. Tout plan qui passe par 2 points du système (des points communs aux 2 plans A et B) passe par tous les autres.

II. Tout point commun à 2 plans du système (des plans qui passent par les 2 points A et B) est situé dans tous les autres.

En résumé:

Deux points, et deux plans passant les deux points, déterminent un système de rayons de 1^{er} ordre et de 2^e classe. Tout rayon du système est le porteur d'une involution et base d'un faisceau involutif de plans (les deux involutions ayant un sens déterminé). Toutes les involutions rectilignes sont en perspective (en situation d'un seul) avec tous les faisceaux de plans; chaque rayon du système est porteur d'un point imaginaire et d'un plan imaginaire. Chacun des points est situé dans chacun des plans.

Cette figure tout entière s'appelle droite de seconde espèce (1)

19. Si une droite de seconde espèce est déterminée, soit par 2 points, soit par 2 plans, soit par une troupe réglée en involution sans éléments d'ordre et ayant un sens déterminé (v. Beitrag, IV).

Tous les rayons qui coupent une droite n'appartenant pas au système forment une troupe réglée (faisceau de génératrices d'une surface réglée).

20. Si dans les 2 premiers modes de définition ou remplace les éléments / points des plans imaginaires, par leurs conjugués, et qu'on dans le 3^e on renverse le sens (de la troupe réglée) on obtient encore une droite de seconde espèce, dite conjuguée de la première.

Si une droite réelle coupe une droite imaginaire de seconde espèce, elle coupe aussi sa conjuguée; les points et les plans qu'elle détermine avec chacune d'elles sont aussi conjugués.

21. Une droite de seconde espèce a un point (et un seul) commun avec chaque plan réel, et détermine un plan (et un seul) avec chaque point réel.

Trois plans passent par un même point ou par un même point (B).

Trois points sont sur une même droite ou dans un même plan.

Un point et une droite (extérieure) déterminent un plan.

Un plan et une droite (non contenue...) déterminent un point.

Si deux droites de seconde espèce ont un point commun, elles sont situées dans un même plan; et réciproquement.

(1) August a défini la droite de seconde espèce comme l'intersection de deux plans imaginaires n'ayant aucun point réel commun.

§ 6. Du sens des éléments d'une droite de seconde espèce.

9

22. Définition du jet (Wurf) (Beiträge 24.)

La considération de la droite de seconde espèce permet de distinguer diverses espèces de jets, distinction importante pour la projectivité des figures imaginaires.

Soient $ABTA$ quatre éléments (points ou plans imaginaires) d'une droite de seconde espèce; p, q, r, s leurs porteurs ou axes réels. Si les 4 droites p, q, r, s appartiennent à une même troupe réglée, on dit que le jet $ABTA$ est neutre, ou que les 4 éléments appartiennent à une chaîne. (Beiträge, 196 et 206)

Une troupe réglée étant déterminée par 3 droites, une chaîne est déterminée par 3 ^{éléments} points d'une droite de seconde espèce.

Jet ordinaire (à éléments réels.) (Beiträge 83.)

Les 4 éléments d'un jet ordinaire $ABCD$ se suivent dans cet ordre; on dira qu'ils forment une suite.

Suivant que p, q, r, s , p, q, s, r ou p, s, q, r est un jet ordinaire, le jet $ABTA$ sera un jet neutre de 1^e, de 2^e ou de 3^e espèce (1)

23. Si les 4 droites p, q, r, s n'appartiennent pas à une même troupe réglée, on peut déterminer une troupe réglée à laquelle appartiennent p, q, r . La droite s ne coupe pas cette troupe; elle est donc située d'un côté ou de l'autre de la surface réglée.

Supposons que $ABTA$ soient le point de la droite de seconde esp. D . Soient aa, bb quatre directrices de la troupe réglée p, q, r ; elles sont en involution; soit aba, b le sens choisi. Le point A est une représentation de la droite D . Le point T est dans le plan imaginaire $p(aba, b)$ commun aux autres points de la dr. D ; donc la dr. s (^{l'involution} qui porte A) est en perspective avec le faisceau de plans en involution $p(aba, b)$ et le sens des 2 involutions concorde.

⊕ pour représenter A .

(1) Cette distinction est destinée à préciser la définition de la projectivité de Steiner (§. 89) dont Klein a montré l'insuffisance (ap. Math. Annalen, t. VII.)

Si d'autre part on coupe la droite s par le faisceau $a(pqr)$ dans ce sens, le sens du point d'intersection sera le même que celui du point d'intersection avec le faisceau $p(a, b, t)$ ou sera opposé. — Cette distinction est d'ailleurs indépendante du rayon a (1) En qm. deux droites sont situées de différents côtés de la surface réglée pqr , si l'une est parcourue dans le même sens, et l'autre en sens opposé par les 2 faisceaux de plans.

25. En effet, soit s parcourue dans le même sens, t parcourue en sens contraire par les 2 faisceaux de plans $a(pqr)$ et $p(a, b, t)$. Soient S et T les points où elles percent le plan ap : ces points doivent se trouver dans des secteurs angulaires différents séparés par les dr. a et p (axes des faisceaux). Ces 2 points sont donc séparés par la surface réglée elle-même (qui contient a et p) et par suite les droites s et t elles-mêmes, qui ne coupent pas la surface réglée, sont situées de côtés différents par rapp. à elle.

26. Définitions. Si $ABT'D$ sont le points d'une droite de seconde espèce, p, q, r, s leurs porteurs réels, on dira que le point Δ est dans le sens ABT' ou dans le sens opposé, suivant qu'il est dans le faisceau de plans $a(pqr)$ et $p(a, b, t)$ décrivent la droite s dans le même sens ou dans le sens opposé (le sens ab, a, b, t correspondant à celui qui représente Δ). [cf. Beitrag 196]

Si $ABT'D$ sont le plans d'une droite de seconde espèce, p, q, r, s leur axes réels, on dira que le plan Δ est dans le sens ABT' ou dans le sens opposé, suivant que les deux séries de points $a(pqr)$ et $p(a, b, t)$ décrivent le faisceau de plans s dans le même sens ou en sens opposé (le sens ab, a, b, t correspondant à Δ).

Si Δ est dans le sens ABT' , il se trouve dans les sens BTA, TAB . Sinon, il est dans les sens TBA , ou dans le sens BAT, ATB .

Si la série de points s est décrite dans le même sens par les 2 faisceaux de plans $a(pqr)$ et $p(a, b, t)$, le faisceau de plans s est décrit en sens opposé par les 2 séries de points $a(pqr)$ et $p(a, b, t)$ [Beitrag 196]

(1) Beitrag 55. Démontré dans le no 24 du mémoire

18. On dit que deux jets $ABTA$ et $A'B'T'A'$ sont de même espèce, s'ils ont le même sens, ou s'ils sont tous deux neutres et de la même espèce. (cf. Beiträge, 197)

Si les points d'une droite de seconde espèce sont situés dans le plan de la droite conjuguée, le jet des points est de même espèce que le jet des plans.

§ 7. Suite.

19. Si deux systèmes réels de l'espace sont en relation projective, à chaque élément imaginaire correspond un élément imaginaire, et à chaque jet de n éléments d'une droite de seconde espèce, un jet semblable et de même espèce. On dit que les deux figures sont en projectivité réelle. (Beiträge, 198)

20. Si l'on projette les points réels ou imaginaires $ABCD$ d'une droite réelle depuis deux droites de seconde espèce α, α' (par le plan) les deux jets: $\alpha(ABCD), \alpha'(ABCD)$ sont de même espèce.

Si l'on coupe le plan réel ou imaginaire $ABCD$ d'une droite réelle par deux droites de seconde espèce α, α' , les deux jets de points: $\alpha(ABCD), \alpha'(ABCD)$ sont de même espèce. (1)

On peut étendre ces théorèmes à la droite ou plans d'une droite quelconque, pourvu qu'elle ne rencontre pas les droites α, α' .

§ 8. D'usage des éléments dans les autres figures.

21. Si $ABCD$ sont n éléments d'une droite réelle ou imaginaire d'esp. f , on déterminera l'espèce du jet $ABCD$ en joignant et coupant ces n éléments avec une droite imaginaire de seconde esp. qui ne rencontre pas la dr. f . L'espèce du jet $\alpha(ABCD)$ est indépendante du choix de la droite α (en vertu de 30, 31.) (2)

Si les n éléments sont réels, le jet est neutre.
Si les 3 éléments ABC de la droite réelle f sont réels, mais si D est imaginaire et représenté par EFE, F , D est dans le sens ABC ou non, suivant que le sens ABC concorde avec le sens EFE , ou non.

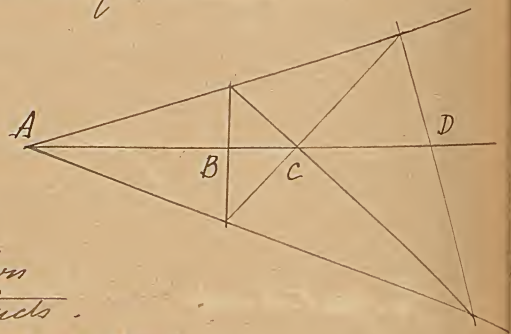
(1) Beiträge, 199.

(2) Beiträge, 200.

33. Si les points d'une droite sont situés dans le plan d'une autre droite, les deux jets sont de même espèce. (Beiträg, 201.)
34. Si les droites de K-esp. $\alpha\beta\gamma\delta$ sont situées dans un même plan K et passent par le même point K', le jet $\alpha\beta\gamma\delta$ sera d'une espèce 1^o que le jet du plan ABCD qui passe par les 4 droites et se coupe suivant une même droite α' contenu dans le plan passant par le point K. 2^o que le jet des points A'B'C'D' où les 4 droites rencontrent une même droite α' située dans le plan K. (Beiträg, 202.)
35. Des jets en perspective sont de même espèce quant au sens. (B. 203.)
36. Quand dans un jet on permute à la fois deux éléments et les deux autres, on obtient un jet de même espèce que le premier. (B. 205.)

§ 9. Éléments harmoniques.

37. Si A, B, C sont 3 points d'une ligne droite, on détermine leur quatrième harmonique D en construisant un quadrilatère complet quelconque. Si les 3 points donnés sont réels, tous les points de la construction sont réels, et les 4 points sont distincts.



On le prouve encore quand les points sont tous imaginaires. — On dit dans tous les cas que le point D est séparé harmoniquement de B par les points A et C. (1)

38. La projection d'un jet harmonique est un jet harmonique. Deux éléments imaginaires conjugués sont séparés harmoniquement par chaque couple de l'involution qui les représente. (B. 145.)
39. Il existe un couple de points, et un seul, qui soit à la fois séparé harmoniquement par deux couples réels donnés.
40. Un jet harmonique est toujours neutre; autrement dit quatre éléments harmoniques forment une chaîne. (B. 143.)

(1) Geom. d. Lage, § 3. Beiträg, 142

12. Si dans une figure donnée, ni les chaînes MAB et MA_1B_1 , ni les chaînes MAB_1 et MA_1B n'ont un second élément commun, il y a toujours un élément N qui est séparé harmoniquement de M par AA_1 et par BB_1 ; et réciproquement. (B. 211.)

§ 10. Relation projective.

13. Définition de la projectivité de deux figures uniformes, réelles ou imaginaires. (B. 215.) Remarque que l'expression « jets de même espèce » a maintenant un sens plus restreint (dans le cas où les jets sont neutres.) V. n° 22 de ce mémoire.

14. A chaque jet harmonique correspond un jet harmonique (B. 214.)

15. Si deux droites réelles sont projectives, de telle sorte qu'à 3 points réels ABC de l'une correspondent 3 points réels $A'B'C'$ de l'autre, elles sont en projectivité réelle (29.) (B. 216.)

16. Si deux figures uniformes projectives et situées l'une dans l'autre ont 3 éléments correspondants communs, elles ont tous leurs éléments correspondants communs. (B. 217.)

Si $ABCD \propto ADCB$, les couples AC et BD sont harmoniques.

17. Deux figures en perspective (telles que chaque élément de l'une soit situé dans ~~le plan~~ correspondant de l'autre) sont par suite projectives (35.)

Commune par deux projections successives on peut transformer un jet en un autre où les éléments soient intervertis deux par deux, deux jets sont projectifs. (36.)

Deux figures réelles en projectivité réelle sont entièrement projectives.

18. Deux figures projectives, ou bien sont en perspective, ou bien peuvent être considérées comme la première et la dernière d'une suite de figures dont chacune est en perspective avec la suivante. (cf. G. 112.)

Pour que cette propriété soit vraie en général, il est indispensable de tenir compte du sens: ainsi, si dans une figure on fait correspondre chaque élément son conjugué (ch. élém. réel à lui-même) on n'obtient pas une figure projective (cà d. issue de la 1^{re} par une suite de perspectives) à la 1^{re}. [cf. B. 226.] (v. n° 43 et 22, 38.)

§ 44. Éléments imaginaires d'une conique réelle

48. Conique = lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux réels projectifs situés dans un même plan. Le point d'intersection de 2 rayons imaginaires homologues est un point imaginaire de la conique.

Chacun des 2 rayons imaginaires est représenté par une involution dans le faisceau correspondant, et les 2 involutions sont en perspective avec une même involution de points sur la conique; le centre de cette involution représente le point imaginaire, si l'on y ajoute le conjugué de l'involution.

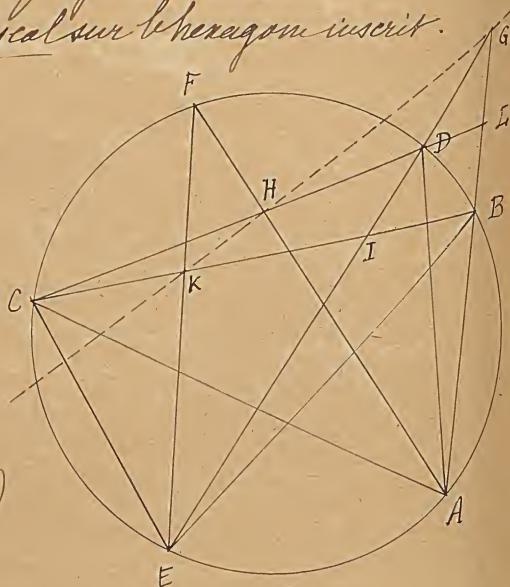
Toute droite réelle, située dans le plan d'une conique et n'ayant avec elle aucun point réel commun, la coupe en 2 points imaginaires conjugués. Son pôle est le centre de l'involution qui représente à la fois ces deux points (suivant le sens qu'on lui attribue).

50. Une droite imaginaire, située dans le plan d'une conique réelle, la coupe en un ou deux points.

51. Deux faisceaux de rayons, qui projettent une conique depuis deux quelconques de ses points, sont projectifs. Les tangentes en ces points correspondent à la ligne qui joint leurs centres.

Corollaire: Théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit.

Soit $ABCDEF$ l'hexagone inscrit. Les faisceaux $A(BCDE)$, $E(BCDF)$ sont projectifs; les séries de points $CHDI$, $CKIB$ (suivant lesquelles ils coupent resp. les dr CD , CB) sont projections, donc en perspective (le p. C commun) le centre de projection est le p. G , intersection de AB et ED (1); donc les 3 points G, H, K sont en ligne droite (en perspective)



(1) c-à-d. de BL et de ID .

§ 12. Involution

53. Définition générale (B. 70.) On entend par points imaginaires d'une conique en involution l'ensemble des paires (propriété du centre d'involution) - Par le centre d'involution (qui ne peut être sur la courbe) passent 2 tangentes à la courbe (réelles ou imaginaires) Il y a donc dans l'involution deux éléments d'ordre 2 (réels ou imaginaires) qui se correspondent à eux-mêmes. (B. 220.) Soient M, N les éléments d'ordre 2, AA_1 un couple d'éléments; on a: $MNAA_1, \propto MNA_1A$, donc AA_1 sont conjugués harmoniques par MN .

54. Si sur une même droite on a deux séries projectives de points qui ont ^{seul} un point correspondant commun C , et telles qu'aux p. A, B_1 de l'une correspondent les p. B, A_1 de l'autre, on a une involution: CC, AA_1, BB_1 . (B. 221.)

Réciproquement, si CC, AA_1, BB_1 est une involution, les deux séries de points projectives: CAB_1 et CBA_1 , n'ont que le p. C correspondant commun.

Si les deux séries projectives CAB et CA_1B_1 n'ont que l'élément C commun, et de même les séries projectives CAB et CA_2B_2 ; alors les séries CA_1B_1 et CA_2B_2 n'ont que l'élément C commun, à moins qu'elles ne soient identiques (B. 223.)

55. Deux séries projectives de points sur une même droite ne peuvent avoir plus de 2 points correspondants communs sans être identiques; mais elles ont toujours au moins un point correspondant commun. (Projection.)

En général, deux figures élinéaires situées l'une dans l'autre ont toujours un ou deux éléments communs (B. 222.)

Dans le second cas, elles sont en involution. - Si les deux figures sont en projection réelle, elles ont en commun soit un point réel, soit deux éléments réels ou imaginaires conjugués.

Projectivité cyclique ($AA_1, A_2 \propto A_1, A_2, A$) [V. Clebsch, ap. Crell, t. 68, p. 108.]
(Klein, Interpretation des Imaginaires en Géométrie, Göttingen, Nachrichten, 1870.)

17

II. Le calcul des jets.

§ 13. Egalité et Addition.

56. Définition de l'égalité des jets (B. 256.)

57. Définition de la somme de deux jets (B. 258.)

$$u_1 = ABCD,$$

$$u_2 = ABCD_2$$

$$u_1 + u_2 = ABCS$$

58. Jets impropres:

$0, 1, \infty$ (B. 256.)

Le jet ∞ sera exclu; car

si: $u_1 = \infty$, cà d: $u_1 = ABCC$,

~~$ABCD_1 + ABCC$~~ il faudrait qu'on
ait l'involution: $CC.AS.D_1.C$

ce qui est impossible.

Si: $u_1 = 0$, cà d: $u_1 = ABCA$, il faut qu'on ait l'involution:

$CC.AS.AD_2$ donc S est identique à D_2 , et on a

$$0 + u_2 = u_2 = ABCD_2.$$

59. Loi associative: $(u_1 + u_2) + u_3 = (u_1 + u_3) + u_2$ (B. 259.)

$$u_1 = ABCD,$$

$$u_2 = ABCD_2$$

$$u_3 = ABCD_3$$

$$u_1 + u_3 = ABCS_2$$

$$u_1 + u_2 = ABCS_3$$

$CC.D_1.D_2.AS_3$ est une involution; donc les 2 séries projectives

CAD_1 et CD_2S_3 n'ont que C de commun. (54.) De même.

$CC.AS_2.D_1.D_3$ est une involution; donc les 2 séries projectives

CAD_1 et CD_3S_2 n'ont que C de commun. Or, les 2 séries

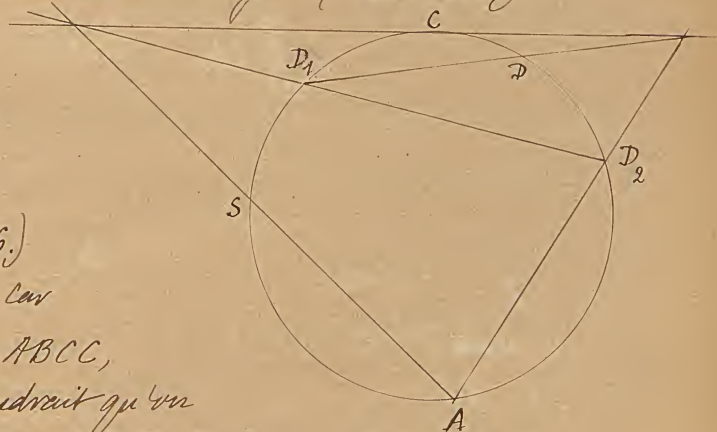
CD_2S_3 et CD_3S_2 ayant le pt C commun, on a l'involution:

$CC.D_2S_2.D_3S_3$. Soit S l'homologue de A dans cette involution:

$$ABCD_2 + ABCS_2 = ABCS$$

$$ABCD_3 + ABCS_3 = ABCS$$

c. q. f. d.



60. Définition de la différence de deux jits ($u_2 - u_1$)
 Si $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$, $u_2 - u_1 = ABCD$
 le point D étant constant comme il est indiqué ds la fig.
 (Involutions: $CC. AD_2. D, D_1$) — (0 - u) s'écrit: -u
 (V. Hankel, Vorl. u. d. komplexen Zahlen; Schröder, Lehrb. d. A. u. A.)

§ 14. Multiplication

61. Définition du produit de deux jits: $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$
 On forme l'involution: $AC. D_1. D_2. BP$

(B. 268.) $u_1 u_2 = ABCEP$.

Si $u_1 = 1 = ABCB$,
 on doit avoir l'involution:

$AC. BD_2. BP$

donc P coïncide avec D_2 .

1. $u_2 = u_2$

Pour que $u_1 u_2 = 0$, il faut que
 P coïncide avec A ; alors un des
 points D_1, D_2 coïncidera avec A ,
 l'un des facteurs sera: $ABCA = 0$.

Inversement, on dit qu'un produit dont un facteur est nul
 doit être nul; bien que l'involution: $AC. AD_2. BP$
 soit impossible⁽¹⁾. Donc: Pour qu'un produit soit égal à zéro,
 il faut et il suffit qu'un de ses facteurs soit 0. (B. 269.)

62. Si: $ABCE \times ABCF = ABCG$, on a l'involution:

$AC. BG. EF$; d'où: $ABCF = CGAE = AECG$;
 donc: $ABCE \times AECG = ABCG$ (autre définition)

Loi associative: $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$, $u_3 = ABCD_3$
 posons: $u_2 = AD_1CP_3$, $u_3 = AP_3CP$

$u_1 u_2 = ABCD_1 \times AD_1CP_3 = ABCP_3$ ($u_1 u_2$) $u_3 = ABCP$

$u_2 u_3 = AD_1CP_3 \times AP_3CP = AD_1CP$ ($u_2 u_3$) $u_1 = ABCP$

Donc: $(u_1 u_2) u_3 = (u_2 u_3) u_1$ (B. 269.)

(1) parce que la construction est encore applicable à ce cas, et donne P et u_1

Le produit d'un jet positif et d'un jet négatif est négatif.

67. La somme de deux jets positifs est positive; de deux jets négatifs, négative. Elle n'est jamais nulle.

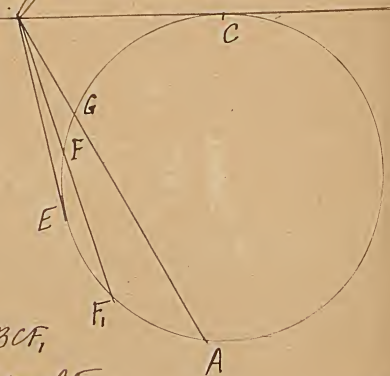
68. Un jet u_1 est dit plus grand qu'un jet u_2 , si la différence $u_1 - u_2$ est positive: on écrit: $u_1 > u_2$.
Un jet positif est plus grand que 0; négatif, plus petit que 0.

69. Le produit de 2 jets positifs plus petits que 1 est plus petit que 1; plus grands que 1, est plus grand que 1.

70. Étant donné un jet u , peut-on, en le divisant par 2 un assez grand nombre de fois⁽ⁿ⁾, obtenir un jet u_n plus petit qu'un jet donné $v < u$? — Soit $u = ABCD, \dots u_n = ABCD_n$.
Soit $v = ABCF$. Les points D et P sont sur le segment (rectiligne) ABC ; les points D_1, D_2, \dots, D_n s'approchent sans cesse de A. Si dans tout segment AP (non nul) il n'y a pas des points D_n , il existe (en vertu de la continuité de la droite⁽¹⁾) un point E qui sépare la partie de ABC où il n'y a aucun point D_n de celle où ils sont tous: de sorte que dans tout segment AE contenant E , il y a des points D_n .

71. Tout jet $u_n > ABCF$, mais tout jet $ABCF > ABCF$ est plus grand que certains jets u_n .
On peut trouver un jet $ABCF > ABCF$ tel que sa moitié $ABCF_1 < ABCF$.
En effet, il suffit de prendre F entre E et G ($ABCG = 2 \cdot ABCF$)
 F_1 sera entre E et A. Or si $u_n < ABCF$ (ce qui a lieu par hypothèse) $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} < ABCF_1$, il y aura donc des points D_n sur AF_1 , c'est-à-dire sur AE .
Ainsi que E ne coïncide avec G, auquel cas ($2 \cdot ABCF = ABCF$) E coïncidera aussi avec A ($ABCF = 0$). Conclusion:
Par la dichotomie répétée d'un jet positif on peut obtenir un jet plus petit qu'un jet donné quelconque (positif).

(1) Dedekind, *Stetigkeit*, p. 18.



§ 16. Jets non neutres.

72. La somme et le produit de deux jets conjugués sont neutres. Il existe toujours un jet neutre dont le carré est égal au produit de deux jets conjugués, et qu'on nomme leur module.

73. Si l'on exécute sur un certain nombre de jets et sur leurs conjugués la même suite d'additions et de multiplications, on obtient des résultats conjugués.

74. Soit i un jet ^{non} neutre, i' son conjugué: $i - i' \neq 0$.

Soit W un autre jet non neutre, W' son conjugué; on peut trouver V tel que: $W - W' = (i - i') V$.

~~D'autre part~~ même: $W' - W = (i' - i) V$.

Donc: $V = V'$ V est un jet neutre.

D'autre part: $W + W' = 2u$, jet neutre

Donc: $W = u + \frac{i - i'}{2} V$

Posons: $u + \frac{i + i'}{2} V = u$ jet neutre

Il vient: $W = u + iV$ (B. 278)

75. Prenons pour i un jet spécial qu'on va définir.

Si: $ABCB + ABCB' = 0$ on a l'involution:

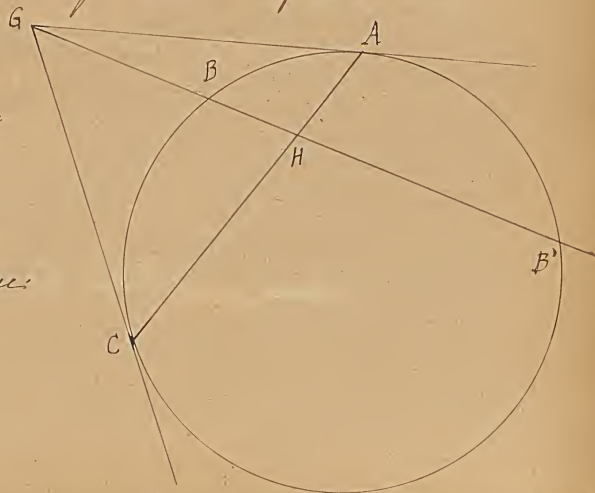
CC, BB', AA , donc AC est séparé harmoniquement par BB' .

$ABCB'$ représente un point imaginaire A ; posons:

$ABCA = i$.

BB' passe par le pôle G de AC donc le point A peut être représenté par H intersection de BG et AC . Le porteur Ecil de A et de A' son conjugué passe par G . Donc:

$$i + i' = 0$$



On tire: $i^2 + ii' = 0$

Or ii' c'est le carré du module de i , donc 1 (parce que le point H qui représente A est sur GB); par suite:

$$i^2 + 1 = 0$$

$$i^2 = -1$$

76. Si: $W = u + iv$, $W' = u + i'v = u - iv$ ($ii' = 1$)

Carré du module: $m^2 = WW' = (u + iv)(u - iv) = u^2 + v^2$

$W + W' = 2u$ Donc: $2m \geq \left| \frac{W + W'}{2} \right|$

Le module d'un produit est égal au produit des modules:

$$p^2 = (W_1, W_2) / (W'_1, W'_2) = (W_1, W'_1) (W_2, W'_2) = m_1^2 m_2^2$$

Module d'une somme: $s^2 = (W_1 + W_2) / (W'_1 + W'_2)$
 $= m_1^2 + m_2^2 + W_1 W'_2 + W_2 W'_1$

Or: $2m_1 m_2 \geq |W_1 W'_2 + W_2 W'_1|$ Donc:

$$s^2 (m_1 - m_2)^2 \leq s^2 \leq (m_1 + m_2)^2$$

§ 17. Fonctions entières.

77. $W_0 x^n + W_1 x^{n-1} + W_2 x^{n-2} + \dots + W_{n-1} x + W_n = f(x)$

x étant un jet indéterminé, W_0, W_1, \dots, W_n des jets donnés.

On peut assigner au module du jet variable une limite au-dessus de laquelle le module de la fonction dépasse un jet donné.

78. Pour h suffisamment petit, le module de $f(x_0 + h)$ diffère de celui de $f(x_0)$ de moins de ϵ .

79. L'ensemble des modules des valeurs que prend la fonction quand le jet variable prend toutes les valeurs réelles et non-nulles a nécessairement une limite inférieure: $ABCD = k$

On démontre qu'il y a toujours au moins un jet qui, substitué à x , rend le module de la fonction égal à la lim. inf. k .

(Cf. Darboux, Bulletin des Sciences mathématiques, 1872, p. 307.)

80. On démontre ensuite que la limite inférieure du module de la fonction est respectée qu'un jet nul, c.à.d. $k = 0$ (Ségard)

On en conclut qu'il y a toujours un jet qui substitué à x rend la fonction égale à zéro.

Il s'ensuit, d'une manière formelle, qu'il y a n jets, et n seulement, qui annulent une fonction entière de degré n .

§ 18. Coordonnées.

81. Étant donnés les points fixes $ABCE$ dans un plan (réel ou imag.) un point quelconque P de ce plan détermine les 3 jets :

$$A(BCP) \quad B(CEP) \quad C(AEP)$$

Réciproq^{te}, deux de ces jets déterminent le point P . Il y a donc une relation entre ces 3 jets.

$$B(CEP) = A(CEBP)$$

$$C(AEP) = A(CP, BP)$$

$$B(CEP) \times C(AEP)$$

$$= A(CEBP) \times A(CP, BP)$$

$$= A(CEBP) = A(BPCE)$$

$$A(BCP) \times A(BPCE) = 1$$

Donc : $A(BCP) \times B(CEP) \times C(AEP) = 1$. Posons :

$$A(BCP) = \frac{x_3}{x_2}$$

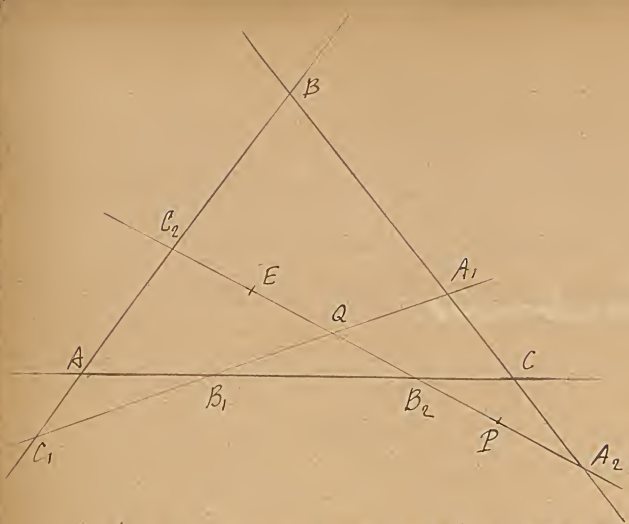
$$B(CEP) = \frac{x_1}{x_3}$$

$$C(AEP) = \frac{x_2}{x_1}$$

Les 3 jets x_1, x_2, x_3 est indéterminé. Ces jets s'appellent les coordonnées triangulaires projectives du point P . — Le calcul précédent ne vaut plus si l'un des 3 jets devient ∞ , ce qui a lieu quand P est sur un des 3 côtés du $\triangle ABC$. Dans ce cas, une des coordonnées est nulle : $x_1 = 0$; sur CA ; $x_2 = 0$; sur AB ; $x_3 = 0$.

Ainsi on peut représenter tous les points du plan sans faire aucun des 3 coordonnées (x_1, x_2, x_3) infinie.

Interprétation géométrique des coordonnées. On se donne dans le plan un $\triangle ABC$ une ligne quelconque qui coupe EP en Q , BC, CA, AB en A_1, B_1, C_1 ; tandis que EP coupe les mêmes côtés du triangle ABC en A_2, B_2, C_2 .



Pour: $\kappa_3 = \frac{C_2EQP}{EC_2PQ} = EC_2PQ$

$\frac{\kappa_1}{\kappa_3} = B(CEAP) = A_2EC_2P = EA_2PC_2$
 donc: $\kappa_1 = EC_2PQ \times EA_2PC_2 = EA_2PQ = A_2EQP$

$\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = A(BECP) = C_2EB_2P = EC_2PB_2$
 donc: $\frac{\kappa_2}{\kappa_3} = EB_2PC_2$

donc: $\kappa_2 = EB_2PC_2 \times EC_2PQ = EB_2PQ = B_2EQP$

En vertu du principe de dualité, on détermine les coordonnées projectives (ξ_1, ξ_2, ξ_3) d'une droite par le moyen d'un trilatère abc et d'une droite e de son plan; par les formules:

$a(becp) = \frac{\xi_3}{\xi_2}, \quad b(caep) = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad c(aebp) = \frac{\xi_2}{\xi_1}$

82. Etant données deux figures d'éléments, par ex. 2 séries de points $ABC... A_1B_1C_1$ sur une conique, on les fait correspondre par deux points mobiles P, P_1 qui vérifient l'équation:

$ABCP = A_1B_1C_1P_1 + u$ (u fixé donné)

Les deux séries de points sont en relation projective, et les points C et C_1 se correspondent. — De même, l'équation:

$A_1B_1C_1P_1 = ABCP \times u$

établit une relation projective entre les points A et A_1 , C et C_1 se correspondent.

Inversement, si les deux séries de points sont en relation projective de telle sorte que les éléments C et C_1 se correspondent, elles vérifient l'équation:

$A_1B_1C_1P_1 = u + v(ABCP)$

Et au contraire les éléments A et A_1 se correspondent, on a l'équation: $A_1B_1C_1P_1 = u + \frac{v}{ABCP}$ ($= u + v(CBAP)$)

Enfin si C_1 ne correspond ni à A ni à C mais à D , on a l'équation:

$A_1B_1C_1D_1 = u + \frac{v}{ABCP - ABCD}$

En résumé, on a l'équation générale :

$$t(ABCP)(A, B, C, P) + u(ABCP) + v(AB, C, P) + w = 0$$

83. Equation d'une ligne droite. Les 2 faisceaux issus de A et B doivent être projectifs et avoir le rayon AB commun. Soit P un point mobile de la droite; on doit avoir une équation de la forme :

$$B(CEAP) = u + \frac{v}{A(BECP)}$$

cà d: $\frac{x_1}{x_3} = u + v \frac{x_2}{x_3}$ ou: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$.

Relation entre les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 de la droite, quand le triangle coïncide avec le trièdre.

Pour C_1 , $x_3 = 0$, donc: $C(AEB C_1) = \frac{x_2}{x_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.
(A, B, C est la droite en question; A_2, B_2, C_2 la droite e .)

cà d: $-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = AC_2 BC_1$

Donc: $-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} (AC_2 BC_3)$

$= AC_2 BC_3 \times AC_3 BC_1$

$= AC_2 BC_1$

Or: $\frac{\xi_2}{\xi_1} = c(aebp)$

$= BC_2 AC_1 = AC_1 BC_2$

Donc: $(AC_1 BC_2 \times AC_2 BC_1 = 1)$:

$\frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} (AC_2 BC_3)$

$\frac{\xi_2}{\xi_3} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} (BA_2 CA_3)$

$\frac{\xi_3}{\xi_1} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} (CB_2 AB_3)$

$(AC_2 BC_3)(BA_2 CA_3)(CB_2 AB_3) = -1$

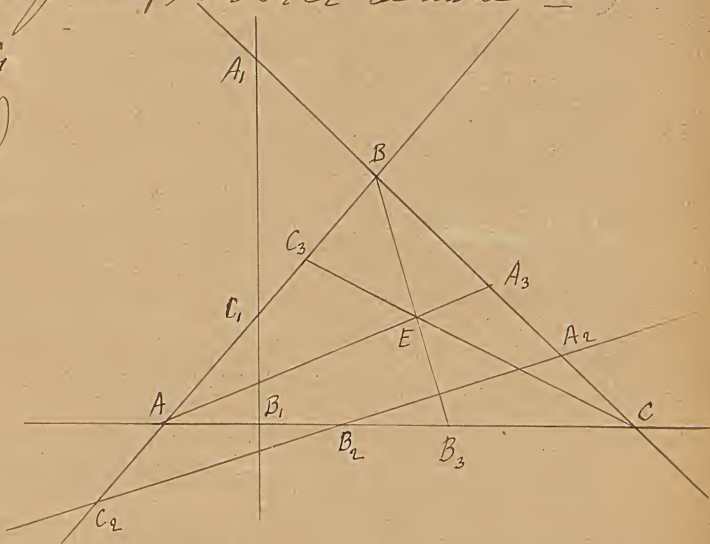
On peut donc poser :

$AC_2 BC_3 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, BA_2 CA_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2}, CB_2 AB_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$

Or les équations: $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\lambda_1 \xi_1}{\lambda_2 \xi_2}, \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\lambda_2 \xi_2}{\lambda_3 \xi_3}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\lambda_3 \xi_3}{\lambda_1 \xi_1}$

ou simplement: $\alpha_1 = \lambda_1 \xi_1, \alpha_2 = \lambda_2 \xi_2, \alpha_3 = \lambda_3 \xi_3$

à cause de l'indétermination des jets ξ_1, ξ_2, ξ_3 .



L'équation de la droite devient alors:

$$\lambda_1 \xi_1 x_1 + \lambda_2 \xi_2 x_2 + \lambda_3 \xi_3 x_3 = 0$$

ou simplement: $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$

si l'on pose: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$,

cà dire si les 3 jets: AC_2BC_3 , BA_2CA_3 , CB_2AB_3 sont harmoniques (l'adr e est l'harmonique du point E .)

§ 19. Courbes algébriques.

Si la position d'un point mobile P dans un plan est déterminée par cette condition, qu'un point et une droite doivent être situés l'un dans l'autre, point et droite qui résultent de P par une construction de lignes droites, le point P décrit une courbe de n ordre, si e est n fois employé dans cette construction. Réciproquement, toute courbe de n ordre peut être engendrée de cette manière, en ajoutant au besoin une droite (1).

Une conséquence formelle de cette définition, et de la forme de l'équation de la droite, est qu'une ^{certaine} fonction entière de degré n des coordonnées de P doit être égale à 0, quand le point P appartient à une certaine courbe de n ordre; quelle que soient des nombres ou des jets.

En combinant cette équation avec celle de la droite, on obtient, pour déterminer leurs points d'intersection, une équation de degré n à un jet inconnu, qui est toujours vérifiée par n jets (80). On a une courbe de n ordre est coupée par toute droite en n points.

De même, pour trouver les points communs à 2 courbes d'ordre m et n , on combinera leurs équations. On sait que deux équations de degré m et n donnent, par l'élimination d'une inconnue, une équation à un inconnu de degré $m \times n$. Donc deux courbes d'ordre m et n se coupent en $m \times n$ points.

(Carlsruher, juillet 1874.)

(1) Grassmann, Ausdehnungslehre, p. 189; Crellé, t. 31, 36, 42, 44, 49.

Second mémoire (même titre) ap. Mathematische Annalen t. XI.
(1877)

Certification, d'une manière purement géométrique, de la
représentation des imaginaires proposée par M. Klein
(Göttinger Nachrichten, 1872, p. 373.) Me repère sur un
généralisation de l'involution (cf. Fuchs, Annali di
Matematica, t. II, 1859) appelée involution cyclique par
Clebsch (Journal de Borchardt, t. 68, p. 167).

§ I. Involutions cycliques.

1. Les points a_1, a_2, \dots, a_n d'une droite forment un groupe
cyclo-projectif, quand deux séries de points se trouvent sur cette
droite en relation projective de telle sorte qu'à un point a_1 de la
première corresponde le point a_2 de la seconde, au point a_2 de la
première le point a_3 de la seconde, ... et au point a_n de la prem.
le point a_1 de la seconde; c'est-à-dire si l'on a :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \propto a_2, a_3, a_4, \dots, a_1.$$

2. Trois points forment toujours un groupe cyclo-projectif.
Pour que quatre points forment un groupe cyclo-projectif,
on doit avoir :

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \propto a_2, a_3, a_4, a_1 \propto a_1, a_2, a_3, a_4$$

c'est-à-dire que a_1, a_2 sont séparés harmoniquement par a_3, a_4 ; le
jet a_1, a_2, a_3, a_4 est harmonique (et les points rangés dans cet ordre)

3. Un groupe cyclo-projectif de n points : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
est déterminé d'une manière complète et uniforme par trois
points donnés a_1, a_2, a_3 , aux conditions suivantes : 1° qu'on ait :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \propto a_2, a_3, a_4, \dots, a_1$$

2° que les points suivants : a_2, a_3, \dots, a_n soient situés sur le
segment a_2, a_1 de la droite (c'est-à-dire celui qui ne contient pas a_3 .)

4. On appelle groupe ordinaire un groupe dont les points se suivent
sur la droite dans le même ordre qu'ils dans la désignation du groupe
(dans l'ordre de leurs indices.)

Théorème: Si trois points consécutifs d'un groupe cyclo-projectif ordinaire sont donnés, le groupe est complètement déterminé.

Corollaire: Si deux groupes ordinaires de n points ont trois points consécutifs communs, ils coïncident entièrement.

Ces propositions s'étendent aux faisceaux de plans et de rayons, et aux groupes cyclo-projectifs sur une conique; en particulier, aux faisceaux situés en perspective avec ~~un~~ ^{un groupe} ~~un~~ points cyclo-projectifs.

11. Dans un groupe cyclo-projectif situé sur une conique, toutes les cordes qui joignent les couples de points ayant la même somme d'indices passent par un même point (p, s , s étant la S. des ind.).

§ II Représentation des imaginaires en Géométrie au moyen des groupes cyclo-projectifs.

16. On appelle point élément imaginaire d'une figure une forme un groupe cyclo-projectif ordinaire $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ formé d'éléments réels de cette figure, en y joignant un sens déterminé. Les deux groupes $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ et $a_1 a_n \dots a_3 a_2$ sont de sens opposés: ils représentent deux éléments imaginaires conjugués.

Si $b_1 b_2 \dots b_n$ est un ^{autre} groupe ordinaire appartenant à la même involutions cyclique que $a_1 a_2 \dots a_n$, il représente le même élément imaginaire que ce dernier groupe, si leurs sens concordent. Il existe toujours un tel groupe partant d'un point donné. (6.)

La jonction de deux ~~groupes~~ ^{involutions cycliques} d'espèce différente en perspective de position et de sens. Il suffit que 2 groupes cyclo-projectifs soient en perspective, c'est-à-dire que 3 éléments consécutifs de l'un passent par 3 éléments consécutifs de l'autre (faisceaux de plans ou de rayons et séries de points). — On peut alors répéter ici le § 3 du premier mémoire.

17. Deux points imaginaires dont les porteurs réels se coupent (sans coïncider) déterminent toujours une droite imaginaire de la même espèce. (Répéter § 3, nos 13 et 14.)

Helmholtz.

Kronecker.

Bolzano (Stolz)

Poincaré.

Weierstrass.

Dedekind.

Méray.

Carnot.

Lipschitz.

Schubert.

Bellavitis.

Mourey.

Fauré.

h -

359

Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem
fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet.
Leipzig, Fues (Reisland) 1887.

Von Helmholtz: Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch
betrachtet. (p. 17-52.)

L'auteur combat l'apriorisme kantien, selon lequel
les axiomes de l'arithmétique et de la géométrie seraient
des jugements synthétiques a priori déterminant l'intuition
transcendante de l'espace et du temps (partant
indémontrables et invérifiables.)

Il a montré que les axiomes de la géométrie sont
des propositions expérimentales (Il lui reste à étendre
la conception kantienne de l'espace comme forme d'intuition
transcendante) Il lui reste à étendre sa théorie empiriste
aux axiomes arithmétiques, relatifs à l'intuition du temps.

Axiomes classiques de l'arithmétique:

- I. Deux grandeurs égales à une 3e sont égales entre elles.
 - II. Loi associative de l'addition: $(a+b)+c = a+(b+c)$
 - III. Loi commutative: $a+b = b+a$
 - IV. Egal ajouté à égal donne une somme égale.
 - V. Egal ajouté à inégal donne des sommes inégales.
- Les 2 axiomes II et III se déduisent d'un seul (par induction complète.)
- Axiome de Grassmann (1) $(a+b)+1 = a+(b+1)$

Dans l'application des nombres aux grandeurs physiques, outre
l'idée de grandeur et celle d'égalité, on fait intervenir celle d'unité.
C'est une restriction inutile de cette application, attendu qu'il
suffit d'avance que les grandeurs physiques sont composées d'unités.

(1) Hermann Grassmann: die Ausdehnungslehre. Leipzig 1844, 1878.
Robert Grassmann: die Formenlehre oder die Mathematik. Stuttgart, 1872.

Schröder Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig, 1873
 est le premier qui ait reconnu le postulat suivant lequel le nombre
 d'un groupe d'objets est indépendant de l'ordre dans lequel on le
 compte; postulat admis comme un fait par les arithméticiens anté-
 rieurs. — P. du Bois Raymond a développé une théorie antérieure
 de la grandeur (Théorie générale des fonctions, Tübingen, 1882).
 L'auteur croit pouvoir lever les contradictions signalées par du
 Bois Raymond. L'arithmétique pure est une méthode, fondée sur des fa-
 cts purement psychologiques, d'application d'un système de signes (nom-
 breux) indéfinis et d'approximation (Wesensrechnung) indéfinis.
 Elle cherche quelles sont les combinaisons de ces signes qui conduisent
 au même résultat. Elle enseigne à remplacer des calculs extérieurement
 compliqués, des opérations qui ne pourraient s'achever en aucun temps
 fini, par des opérations plus simples. Abstraction faite de son appli-
 cation, c'est un jeu de l'esprit sur des objets imaginaires. Mais le système
 des signes nous permet de représenter et de déterminer les rapports des
 objets réels, avec autant d'approximation qu'on veut; et de calculer
 au moyen des lois naturelles, les valeurs numériques qu'on mesure
 le résultat d'un processus physique soumis à ces lois. — Qu'on
 comment et à quelles conditions pouvons-nous exprimer les rapports
 des objets réels par des nombres numériques, comme des grandeurs?
 La question se dédouble: Quel est le sens objectif de ce fait que nous
 déclarons deux objets égaux dans certain rapport? Quel caractère
 avoir une combinaison physique de 2 objets, pour qu'on puisse la considérer
 comme une addition des attributs comparables de ces objets, et en attribuer
 eux-mêmes comme des grandeurs, exprimables par des nombres numériques.
 — La suite naturelle (régulière) des nombres est une suite de signes
 arbitraires rangés dans un ordre déterminé (conventionnel d'ailleurs).
 numération (Laßlen) suppose qu'on conserve par la mémoire les termes
 qui se sont succédés dans la conscience. — Ce sont les nombres ordinaires.
 La suite n'a qu'un sens (eindeutig) elle est par conséquent (comme le cours de
 Les termes précédents se distinguent des suivants, ^{indifféremment} comme de la conscience le fait
 de l'avoir

La suite naturelle des nombres entiers est illimitée.

Axiome VI: De deux nombres différents, l'un précède l'autre dans la suite naturelle: le premier est ^{supérieur} plus bas, le second ^{supérieur} plus haut.

Les désignations: plus grand, plus petit, comparativement au nombre cardinal (dénombrable) et lui sont réservées plus tard.]

Le signe $(a+1)$ désigne le nombre qui suit immédiatement a .

Le signe $a=b$ signifie simplement que a est le même nombre que b . Donc, si: $a=b$, $c=b$, $a=c$ (axiome I.)

Définition. $(a+b)$ est le nombre auquel on aboutit quand on compte $1, 2, 3, \dots, b$ à partir du nombre $(a+1)$ inclusif.

$(a+1)$ correspond à 1.

$(a+1)+1 = a+(1+1) = a+2$ ——— 2.

$(a+2)+1 = a+(2+1) = a+3$ ——— 3.

enfin: $(a+b)$ ——— b .

$(a+b)+1 = a+(b+1)$ [axiome de Grassmann]

Cet axiome résume l'opération précédente (Addition)

Une somme simple jusqu'à un ordre déterminé des termes.

Le nombre $(a+1)$ est la somme de a et de 1.

La somme $(a+b)$ existe toujours elle est unique (axiome IV.)

Elle est nécessairement supérieure à a .

Si c est un nombre supérieur à a , on doit l'atteindre en comptant à partir de a (exclusif); si c est le b^{e} nombre après a , on a: $c = (a+b)$ D'où:

Axiome VII. Si un nombre c est supérieur à un nombre a , c est la somme du nombre a et d'un certain nombre b .

Théorème I. Loi d'association: $(a+b)+c = a+(b+c)$

Démonstration par l'induction complète, en partant de l'axiome de Grassmann — Les deux membres de l'égalité peuvent s'écrire: $a+b+c$ (dans un ordre déterminé)

Généralisation: On étend la loi d'association à une somme de n nombre quelconque de nombres.

Il y a aucune raison pour interrompre la suite des nombres, ou pour revenir à un nombre antérieur. La théorie des nombres ramène des suites qui recommencent un certain nombre, c'est-à-dire des suites qui se répètent périodiquement.

Théorème II: Loi de commutation: $1+a = a+1$.

Démonstration par induction complète (l'ith. est vrai pour a)

Théorème III: Loi de commutation: $a+b = b+a$

Démonstration par induction complète (l'ith. est vrai pour $b=1$)

Démonstration de l'axiome V: Soit: $(a+b) = f$

$$c+f = c+(a+b) = (c+a) + b$$

Donc: $(c+a)$ est inférieur à $(c+f)$, comme a est inférieur à f . - On a aussi: $(f+c) = (a+c) + b$

En résumé: Si l'on ajoute différents nombres à un même nombre ou un même nombre à différents nombres, on obtient des sommes différentes.

Dans le procédé d'addition, on a fait correspondre (suivant l'ordre) la suite: $a+1, a+2, a+3, \dots, a+b, \dots$ à la suite naturelle: $1, 2, 3, \dots, b, \dots$

sans changer l'ordre naturel des nombres de la première. On considère maintenant deux suites correspondantes (coordonnées) dont l'une sera la suite naturelle, et l'autre une suite (dans un ordre quelconque) de lettres.

Permutations d'une suite coordonnée à la suite des nombres. A chaque nombre correspond une lettre, à chaque lettre un nombre. On peut, sans omettre ni répéter aucune lettre, intervertir l'ordre de deux lettres, correspondant à deux nombres consécutifs; en répétant cette permutation, on peut amener une lettre quelconque au premier rang ou à tel rang qu'on voudra; on peut enfin ranger la suite des lettres dans un ordre quelconque, en permutant toujours deux lettres voisines, et cela, sans lacune ni répétition.

Théorème IV. Les attributs de la suite que n'altère pas la permutation de deux lettres voisines ne changent, par aucun changement d'ordre de la suite, et restent invariables (sont indépendants) des éléments de la suite.)

Corollaire: Généralisation de la loi commutative de l'addition.

Ainsi les 5 axiomes fondamentaux se trouvent déduits du concept de l'addition.

Concept du nombre (Anzahl) des éléments d'un groupe:

Si, en faisant correspondre un nombre à chaque objet, on emploie la suite naturelle et complète des nombres de 1 à n , on dit que n est le nombre des objets (éléments) du groupe. (1)

Du théorème IV il résulte que le nombre des éléments d'un groupe ne change pas quand on change l'ordre de ces éléments.

Les objets numérisés ne doivent pas, pendant qu'on les compte, disparaître, se fondre les uns dans les autres, ou se diviser, etc. Chacun des objets doit constituer une ^{individuelle} ~~unité~~ durable et reconnaissable.

Le nombre total des éléments de deux groupes qui n'ont aucun élément commun est égal à la somme des nombres des éléments de chacun d'eux (en vertu de la définition de l'addition).

Ainsi la conception de l'addition comme adjonction des unités d'un nombre b à celles d'un nombre a coïncide avec notre définition de l'addition; mais celle-ci est dégagée de tout appel à l'expérience, et ne repose que sur l'intuition interne (?).

Le même le concept du nombre, tiré des dénombrements d'objets extérieurs, se ramène à notre concept du nombre abstrait ordinal.

Soustraction. La différence $(a-b)$ est le nombre qu'il faut ajouter à b pour trouver a .

Les nombres étant conçus comme signes d'une suite infinie, on peut continuer la régression (soustraction) indéfiniment, en admettant les nombres $0, -1, -2, \dots$ Résultats de la (2) soustraction successive de l'unité, qui marquent tant au delà qu'en arrière.

La différence de deux nombres ~~devient alors négative et déterminée~~ est alors toujours possible, d'une manière univoque.

(1) Cf. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?

(2) Cf. Argand, Représentation des quantités imaginaires.

Multiplication (définie par la répétition de l'addition.)
Lois de la multiplication :

$$1. a = a$$

$$(b+1).a = b.a + a$$

Analogie des lois de l'addition et de la multiplication.

associatives

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

Commutatives

$$a+b = b+a$$

$$a.b = b.a$$

Mais l'analogie ne subsiste pas quand on combine n nombres égaux à a : par l'addition, on obtient le produit $n.a$, qui est commutatif; par la multiplication, on obtient la puissance a^n , qui n'est pas commutative. — Analogie des lois distributives :

$$(a+b).c = (a.c) + (b.c)$$

$$(a.b)^c = (a^c).(b^c)$$

Nombres dénommés. Quand on compte des objets égaux, chacun d'eux est considéré comme une unité; leur nombre est alors un nombre dénommé suivant la nature des unités. La somme de deux nombres dénommés de même espèce est un nombre dénommé de même espèce.

Si deux groupes d'unités de même espèce ont le même nombre, ils sont dits égaux. S'ils ont des nombres différents, celui qui a le nombre supérieur est dit plus grand, celui qui a le nombre inférieur est dit plus petit.

On appelle grandeurs des objets ou attributs d'objets qui sont comparables à d'autres semblables au point de vue de l'égalité ou de l'inégalité. — Si l'on peut les représenter par un nombre dénommé, ce nombre est dit leur valeur numérique. Le procédé par lequel on obtient ce nombre s'appelle mesure de la grandeur. — Ce nombre exprime le rapport (Verhältnisszahl) de la grandeur à une unité de grandeur de même espèce. Il rapporte en définitive la grandeur aux unités absolues ^{artificielles} de la physique. Comment arrive-t-on à mesurer les grandeurs?

Egalité physique. Elle est caractérisée par l'axiome I.
 Deux grandeurs égales à une troisième sont égales entre elles.
 Hence résulte que l'égalité est commutative.

L'égalité entre les attributs comparables de deux objets est un cas
 exceptionnel; elle se définit par une coïncidence (*Zusammenreffen*)
 ou une coopération (*Zusammenwirken*) des deux objets, ^{qui, dans}
 certaines conditions, donnent lieu à un résultat observable.

Le procédé par lequel on observe ce résultat (identique ou non)
 produit ~~separément~~ par les deux objets dans ^{les mêmes} conditions est
 une méthode de comparaison. De l'axiome I il suit que:
 le résultat de la comparaison doit rester invariable quand on
 permute les deux objets comparés.

Telles sont les conditions que doit remplir une méthode de compa-
 raison pour permettre de constater des égalités résultant des
 propriétés énoncées.

Il résulte que des grandeurs égales peuvent se remplacer mutuellement.

Les grandeurs de même espèce (*gleichartig*) sont celles dont l'égalité
 et l'inégalité se constatent par la même méthode de comparaison (!)

Exemple: Les poids.

Distance de deux points. C'est la plus simple des figures géométriques
 mesurables. Elle suppose que l'on a une méthode de comparaison des distances
 consiste dans la recherche de leur congruence (coïncidence). Elle suppose
 que les couples de points ^{qu'on compare} ont des liaisons stables et fixes.

Une ligne droite est une ligne qui reste immobile quand on fixe deux
 de ses points. Ligne courbe. Longueur d'une droite = distance des deux
 points extrêmes. Si les points extrêmes de 2 droites coïncident, les 2
 droites elles-mêmes coïncident. - Inégalité de 2 droites: on peut définir
 sens de cette inégalité, mais non celui de l'inégalité de deux distances de
 points.

De l'induction de l'égalité de H. Grassmann: «Sont égaux les objets dont on
 toujours affirmer la même chose, ou plus généralement, ceux qu'on peut substituer
 uns aux autres dans le jugement.» Trop générale et trop vague selon Heinehold.

Mesure du temps : au moyen de phénomènes physiques tels que, en se répétant de la même manière et dans les mêmes conditions, s'ils ont commencé dans le même instant, ils finissent aussi en même temps. (?)

Mesure des clartés (Helligkeiten) intensités lumineuses de chaque éclairé (au photomètre) par la indiscernabilité de leur frontière.

Mesure des hauteurs de sons (par les battements).

Mesure des intensités de courants électriques, par le galvanomètre différentiel.

L'axiome I n'est pas une loi objective, mais une condition à laquelle doit ^{être} satisfaire toutes les égalités physiques. Exemple si l'on use de deux plaques de verre l'une sur l'autre, l'une pourra être sphérique concave, l'autre convexe; si on ^{en} use trois alternativement l'une sur les autres, elles ne pourront être que planes. De même pour obtenir des règles bien droites, on en frotte 3 l'une contre l'autre.

Combinaison additive des grandeurs physiques de même espèce. Pour pouvoir mesurer des grandeurs, il faut définir leur addition. 1° La somme de deux grandeurs de même espèce doit être de même espèce, c'est-à-dire qu'on remplace ces grandeurs par des grandeurs égales, on doit pouvoir s'assurer, par la même méthode de comparaison, que leur somme est restée égale à elle-même.

2°, 3° La combinaison physique des grandeurs doit satisfaire aux lois commutative et associative, pour qu'on puisse l'appeler addition. Si les deux premières conditions (1°, et 2° commutative) sont satisfaites, la troisième l'est aussi. En effet, si l'on doit combiner entre eux tels éléments d'une suite additive: $a + b + c + \dots$ avant les autres, on peut les amener, par commutation, aux premières places. — En résumé :

Une combinaison physique de grandeurs de même espèce peut être considérée comme une addition, si le résultat de cette combinaison ne change pas quand on change l'ordre des éléments combinés ou quand on en remplace plusieurs par des grandeurs égales de même espèce.

La définition de l'addition détermine en général le sens de l'inégalité: car la méthode de comparaison ne permet que de reconnaître si deux grandeurs de même espèce sont égales ou inégales. Si deux grandeurs x sont égales, toutes les fonctions de x formées par les mêmes calculs seront aussi égales; mais on ne sait pas si, quand x augmentera, elles augmenteront ou diminueront.

Exemple: La même méthode de comparaison sert à constater l'égalité de résistance (W) et l'égalité de conductibilité (λ) de deux fils conducteurs:

$$W = \frac{1}{\lambda}$$

On ^{ajoute} ~~ajoute~~ les résistances en mettant les fils bout à bout; on additionne les conductibilités ^{en les juxtaposant} en mettant leurs extrémités de manière que le courant les traverse à la fois. La conductibilité et la résistance varient donc en sens inverse. De même les condensateurs, juxtaposés, ajoutent leur capacité; disposés en série ils ajoutent leur tension (potentiel) pour la même charge. La capacité et la tension varient en sens inverse.

« Il ne faut donc pas s'étonner que les axiomes de l'addition se vérifient dans la nature, puisque nous ne reconnaissons comme addition, que les combinaisons physiques qui vérifient ces axiomes. »

Divisibilité des grandeurs et des unités.

Jusqu'ici nous n'avons pas considéré les grandeurs comme composées d'unités. En introduisant cette conception, on simplifie leur représentation, car on peut alors les exprimer par des nombres déterminés.

Les grandeurs qui se laissent ajouter se laissent en général diviser. On peut remplacer chaque grandeur par la somme de ses parties. Si ces parties sont égales dans chaque grandeur et dans les différentes grandeurs de la même espèce, leur nombre suffira à définir chaque grandeur. (1) Ces parties s'appellent des unités.

Si toutes les grandeurs ne sont pas exactement divisibles en unités, toute différence entre les grandeurs se réduit à des différences de nombres.

(ou relations)

(ou relations)

on divise les unités en sous-unités ; d'où les fractions. Les nombres rationnels permettent de mesurer une grandeur avec autant d'approximation qu'on veut. Mais ils ne mesurent exactement que les grandeurs commensurables.

~~Il existe~~ ^{Il existe} des grandeurs incommensurables ; leur rapport à l'unité ne peut alors s'exprimer exactement en nombres rationnels, mais on peut le resserrer entre deux nombres rationnels aussi rapprochés qu'on veut. Cela suffit pour le calcul des fonctions différentiables de variables continues ; mais non pour certaines fonctions discontinues, qui ne permettent pas de représenter l'approximation indéfinie d'un nombre irrationnel par des nombres rationnels.

— Valeurs numériques des propriétés (constantes physiques, coefficients). Il y a, outre les grandeurs susceptibles d'addition, des rapports qu'on peut représenter par des nombres sans définir leur combinaison additive. Ils dépendent en général de la nature particulière d'un corps, des propriétés d'une substance, etc.

Exemple : indice de réfraction : c'est un rapport entre grandeurs mesurables (sinus des angles d'incidence et de réfraction) ; ~~quel~~ ^{quel} nombre qui l'exprime diffère suivant les substances : il définit une propriété de chaque substance : son pouvoir réfringent. De même densités ou poids spécifiques, pouvoir conducteur de la chaleur, ~~de~~ ^{de} l'élasticité, capacité de chaleur, etc. — Il faut y joindre les constantes d'intégration de la dynamique, qui restent invariables pendant le mouvement d'un système fermé.

On a ramené toutes les valeurs numériques à des unités qui dépendent des trois unités fondamentales : temps, longueur, masse. La différence entre les coefficients physiques des grandeurs mesurables n'est pas absolue, car les uns comme les autres se traduisent par des nombres d'énormités ; de plus, on peut trouver d'un jour à l'autre

une combinaison additive de certaines propriétés, qui ~~font~~ transforme
 les coefficients correspondants en grandeurs mesurables. Cette différence
 appelle la distinction métaphysique entre les grandeurs extensives et
 intensives. P. du Bois Reymond appelle les premières linéaires, les secondes
non linéaires.

Pour définir des coefficients physiques, il faut auparavant avoir
 défini des grandeurs mesurables (additives) car c'est de leur comparaison
 tout qu'on déduit la valeur numérique
 des coefficients.

Addition des grandeurs hétérogènes (ungleichartig) composées
 de grandeurs simples appartenant à diverses espèces additives.

Exemple: les vecteurs dans le plan et dans l'espace (composantes, résultante)

La somme de ces grandeurs s'obtient en additionnant séparément leurs
 composantes et en en formant la résultante de toutes les sommes.

Toutes les combinaisons physiques de grandeurs telles, que le résultat
 dépende que de la grandeur et de la direction de la résultante finale,

peuvent sur des combinaisons additives de ce genre. Exemples:

pour 2 dimensions, les imaginaires de Gauss; pour plus de 2 dimensions,

addition des ~~grandeurs~~ ^{vecteurs} géométriques (Vektoren) de H. Grassmann,

le calcul des quaternions, de R. Hamilton. La loi commutative

est elle vérifiée? ainsi on peut combiner en une résultante deux rotations

très petites ou deux vitesses de rotation (d'axes différents) mais

deux rotations finies (dont l'ordre n'est plus indifférent)

Représentation des couleurs comme résultant du mélange de

couleurs principales: d'où la représentation géométrique des couleurs
 du mélange

et des constructions de points matériels, d'un système de 3 axes (Newton)

Multiplication de nombres dénommés.

On peut multiplier un nombre dénommé ax (x désigne l'espèce d'unité)

par un nombre pur (abstrait) n : le produit na est un nombre

dénommé de même espèce: $nax = anx$ (c-à-d. n fois $ax = a$ fois nx)

$$(m+n)a = ma + na$$

$$n(ax+bx) = nax + nbx$$

La multiplication de deux ou plusieurs nombres dénommés n'a un sens déterminé que lorsqu'il existe des combinaisons physiques entre les unités correspondantes, qui vérifient les 3 lois de la multiplication (commutative, associative, distributive). — Exemples (soi l désigne une longueur, t un temps, m une masse) :

une surface est représentée ^{mesure} (dénommiée) par	l^2
un volume	l^3
une vitesse	$\frac{l}{t}$
une force	$\frac{ml}{t^2}$
un travail	$\frac{ml^2}{t^2}$
une pression sur une surface	$\frac{m}{lt^2}$
une tension dans une surface	$\frac{m}{t^2}$
une densité	$\frac{m}{l^3}$
une quantité magnétique	$\frac{l}{t} \sqrt{ml}$
une force magnétique	$\frac{l}{t} \sqrt{\frac{m}{l}}$

— La plupart de ces combinaisons reposent sur la détermination de certains coefficients; mais beaucoup de ces grandeurs peuvent aussi être obtenues par des combinaisons physiques additives (vitesses, courants, forces, pressions, densités, etc.). Mais toutes ces unités définies par multiplication sont étrangères à celles qui les engendrent, et ne recouvrent aucun que par la connaissance de certains lois géométriques ou physiques.

Dans les grandeurs dirigées (Grassmann, *Aussagenlogik*) et les quaternions, la multiplication n'est plus commutative. Elle obéit à la loi : $ab = -ba$.

Le produit de 2 vecteurs est l'aire de leur parallélogramme. Cette aire peut être positive ou négative (suivant le sens de la rotation de a en b .)

Helmholtz: Zählen und Messen Extraits textuels.

p. 20. « Je considère l'arithmétique, ou science des nombres purs, comme une méthode construite sur des faits purement psychologiques, qui enseigne l'application régulière d'un système de signes (à savoir des nombres) d'une étendue illimitée et d'une possibilité indéfinie de raffinement (*Verfeinerung*). L'arithmétique recherche notamment quelles manières différentes de combiner ces signes (opérations de calcul) conduisent au même résultat final. Cela apprend, entre autres choses, à remplacer aussi par des plus simples des calculs extraordinaires compliqués, même ceux qui ne pourraient se terminer en ^{aucun} temps fini. » Abgeschlossen (v. Russell p. 192)

p. 21. La suite normale des nombres. (Russell, p. 191.)

p. 22. La suite est à sens unique (*Eindeutigkeit der Folge*) « Dans la suite des nombres les pas en avant et les pas en arrière ne sont pas ~~les mêmes~~ ^{équivalents} les processus équivalents, mais essentiellement différents, comme la suite des perceptions dans le temps; tandis que ~~pour~~ ^{pour} les lignes qui résident dans le ~~temps~~ ^{espace} en devant ou dans le temps (sans changement), les deux directions possibles du déplacement (*Vor- und Rückwärtsgang*) ne sont pas distinctes l'une de l'autre. En fait, dans notre conscience, chaque acte présent, soit perception, sentiment ou volonté, coopère (*zusammenwirken*) avec les images-mémoires des actes passés, mais non des actes futurs qui à ce moment ne sont pas encore présents dans la conscience; et l'acte présent ^{non perçu} n'est pas différent des images de la mémoire qui sont à côté de lui. Par là la

représentation présente est opposée comme la suivante
aux précédentes, dans un contraste qui tient à la forme
d'intuition du temps; l'appart qui n'est pas réversible
et auquel est nécessairement soumise toute représentation
qui entre dans notre conscience. Dans ce sens l'ordination
(Einordnung) dans la suite du temps est la forme
inévitabile de notre intuition interne»

p. 33. « Seulement il faut que les objets, aussi longtemps
du moins que le résultat d'un dénombrement effectif doit
être valable, satisfassent en fait à certaines conditions, afin
qu'ils soient nombrables. Ils ne doivent pas disparaître, ou
se fondre avec d'autres, ou se diviser en deux, ou de
nouveau venir s'ajouter, de sorte qu'à chaque nom (donné
sous forme d'une lettre grecque) corresponde, d'une manière
durable, un objet, et un seul, délimité, permanent et recon-
naissable comme unique. Quant à savoir si ces conditions
sont remplies dans une classe déterminée d'objets, c'est ce
qu'on ne peut naturellement déterminer que par expérience.»

« Le concept de l'addition, décrit plus haut, coïncide donc
en fait avec le concept qui résulte de la détermination du
nombre total de plusieurs groupes d'objets nombrables; mais
il a l'avantage de pouvoir être acquis sans ^{relation} ~~comparaison~~ (Beziehung)
à l'expérience externe. » — Ainsi se trouve éliminée la
suite des anxiétés de l'addition, nécessaires pour fonder l'arithmétique
pour le concept de nombre et de somme doit nous servir de point
et qui n'est emprunté qu'à l'intuition interne; et en même temps
~~on peut déduire~~ l'accord du résultat de cette sorte d'addition
avec celle que l'on peut tirer du dénombrement d'objets
extérieurs nombrables. » (p. 34.)

p. 41: « Le premier axiome: « Si deux grandeurs sont égales à une troisième, elles sont égales entre elles » n'est pas une loi ayant une signification objective; elle détermine seulement quelles relations nous pouvons (dürfen) reconnaître comme égalités. »

p. 45: « Nous ne pouvons (dürfen) pas nous étonner, si les axiomes de l'addition se vérifient dans le cours de la nature, puisque nous ne reconnaissons comme addition que les combinaisons physiques qui satisfont aux axiomes de l'addition. »

p. 35: — Nombre d'énumérés.

« Le dénombrement d'objets (Stücke) inégaux ... ne sert, en règle générale, qu'à vérifier que leur nombre est complet (zur Vorstellung ihrer Vollständigkeit). — Le dénombrement d'objets égaux est d'une importance bien plus grande et une application plus étendue. Ces objets, qui sont égaux sous un rapport quelconque, et sont nombrés (commetés), nous les appelons unités du dénombrement; nous désignons leur nombre (Anzahl) comme un nombre d'énumérés, et le coefficient particulière des unités qu'il contient (est) la dénomination du nombre. »

p. 36. « Nous nommons grandeurs des objets au attributs d'objets, qui comparés à d'autres admettent la distinction du plus grand, égal au plus petit. Si nous pouvons les exprimer par un nombre d'énumérés, nous appelons celui-ci la valeur de la grandeur; l'opération par laquelle nous trouvons le nombre d'énumérés, la mesure (mesuration) de la grandeur. »

p. 45. Unité d'unité des grandeurs et des unités.
« Jusqu'ici nous n'avons pas encore eu besoin de décomposer les grandeurs en unités. Le concept de la grandeur, ainsi que de

(son) égalité et de (son) addition, a pu être acquis sans cette ^{leur} décomposition. Mais la ^{leur} suprême simplification de la représentation des grandeurs ne peut être obtenue que si nous les résolvons en unités et les exprimons en nombres d'énommés.

p. 52: « Le fait que nous représentons un rapport physique quelconque comme grandeur ne peut jamais s'exprimer que sur la connaissance empirique de ~~certaines~~ ^{la manière dont il se} ~~côtés de se~~ comporte sous certains côtés dans sa ~~coincidence~~ ^{rencontre} ou sa coopération avec d'autres. Je ~~comprends~~ ^{comprends} la compréhension de deux grandeurs spatiales, qui existent dans des corps ou sont limitées par des corps, (dans le sens de mes travaux antérieurs sur les axiomes de la géométrie), comme un rapport physique qui est à constater empiriquement. Pour pouvoir les exprimer par des nombres d'énommés, il nous faut connaître 1° la méthode de comparaison des grandeurs en question, par laquelle leur espèce est caractérisée; 2° soit les méthodes de combinaison additive, soit les lois naturelles où elles figurent comme coefficients.

La grande simplification et systématisation (*Übersichtlichkeit*) de l'apprehension (*Auffassung*), que nous obtenons en ramenant la multiplicité variée des objets et des variations à des rapports quantitatifs, est à sa racine profonde dans l'essence de notre formation des concepts. Quand nous formons le concept d'une classe, nous embrassons en lui tout ce qui est égal (*gleich*) dans les objets qui appartiennent à cette classe. Quand nous concevons un rapport physique comme un nombre d'énommés, nous avons aussi élargi le concept de ses unités toutes ~~et~~ ^{et} ~~particulières~~ ^{particulières} qui leur sont attachées dans la réalité. Elles sont des objets que nous considérons seulement comme des exemplaires de leur classe, et dont l'efficacité dans la direction recherchée ~~ne~~ ^{ne} dépend aussi seulement de ce fait qu'elles sont de tels exemplaires. Dans les grandeurs formées de ces unités il ne subsiste ~~donc~~ ^{donc} alors que la plus forte des différences, celle du nombre. » — Fin.

(1) Zufällig = accidentel, contingent.

Connecker: Sur le concept de nombre (1887)
Extrait du Journal de Crelle, tome 101, pp. 337-355.)
Extrait d'une lettre de Jacobi à Humboldt (trouvée dans le
manuscrit de Lejeune-Dirichlet) (1846, découverte de Neptune par
Archimedes und der Jüngling. Leverrier.)

Zu Archimedes kam ein wissbegieriger Jüngling;
Weiche mich, sprach er zu ihm, ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
Hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.»
Göttlich nennst du die Kunst, sie ist's, versetzte der Weise,
Aber sie war es, bevor noch sie den Kosmos erforscht,
Ehe sie herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
Hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.
Was du im Kosmos erblickst, ist nur der göttlichen Abglanz,
In der Olympier Schaar thronet die ewige Zahl.»
(Parodie d'une poésie de Schiller dans les Xénies :
Archimedes und der Schüler.)

Gauss: « La mathématique est la reine des sciences et l'arbitrante
de toutes les mathématiques. » - « Ο θεος αριθμητις. »
ap. Gauss's zum Gedächtniss, Sartorius von Waltershausen,
Leipzig, 1856, p. 97.)
(dans une lettre à Bessel, 1824) : « Si le nombre est
un produit de notre esprit, l'espace a aussi une réalité hors
notre esprit, une réalité dont nous ne pouvons ^{pas} assigner
rien complètement a priori. » Cf. discours de Ernst Schering,
mars 1877, à la Société royale des Sciences de Göttingue

Définition du nombre.
 §1. Le point de départ naturel du concept de nombre est le nombre ordinal. La suite des nombres ordinaux est un ensemble de désignations que nous appliquons à toute série d'objets distincts et rangés en ordre. L'ensemble des désignations employées dans l'énumération d'une troupe (Schaar) d'objets constitue le nombre de ces objets, et est indiquée par la suite des désignations employées. Les nombres cardinaux dérivent des nombres ordinaux. D'ailleurs ceux-ci forment eux-mêmes une troupe, déterminée par le dernier d'entre eux. Un nombre m est dit plus petit qu'un nombre n , si le nombre ordinal correspondant à m vient avant le nombre ordinal de n . La suite naturelle des nombres n'est autre que la suite des nombres ordinaux correspondants.

[La numération usuelle, ayant pour but d'exprimer le plus possible avec le moins de signes ou de mots possible, est un tableau à double entrée : 9 lignes et 5 colonnes suffisent à désigner les nombres jusqu'à 99999, soit 14 mots au tout. Exemple que l'on marque des points dans les lignes : 3, 2, 4, 5, et dans les colonnes : V, IV, III, II, I on détermine le nombre : 32456 (τρια-μυριας δυο-χιλιες τετρα πενταχμοις εξ.)] 13 mots seulement, les unités n'ayant pas de nom.

§2. Le nombre est indépendant de l'ordre suivi de l'énumération. Quand on compte une troupe d'objets, en appliquant les nombres ordinaux aux objets pris un à un, on leur assigne aux ordres un certain ordre. Si l'on permuté l'ensemble des n ordinaux ainsi employés et qu'on les applique de nouveau aux objets rangés dans le même ordre, cela revient à les compter dans un ordre différent. (Kroncker se dispense ainsi de supposer

commutabilité des objets.) Comme l'ensemble des désignations employées reste le même, le nombre des objets est identique, et par suite indépendant de l'ordre suivi pour compter les objets. On nomme systèmes équivalents des collections d'objets telles que leurs éléments se correspondent un à un, leur ordre étant différent, le nombre de ces éléments est le seul invariant entre les systèmes équivalents. (Bour, 1877)

Lehrbuch der Analysis: Si dans la considération des choses séparées on fait abstraction des signes par lesquels elles se distinguent, il reste le concept du nombre des choses considérées. ^{(Caractères) (Merkmale)}

L'addition - Ajouter n_2 à n_1 , c'est compter n_2 en partant de $n_1 + 1$, dans la suite naturelle des nombres. Il faut prouver que:

$$n_2 + n_1 = n_1 + n_2, \text{ ou généralement:}$$

$$n_2 + \dots + n_r = n_\alpha + n_\beta + \dots + n_p, \quad \alpha, \beta, \dots, p$$

si les nombres $1, 2, \dots, r$ rangés dans un autre ordre.

Si l'on forme le tableau complet des systèmes de $En.(h, k)$

$$\text{on en faisant: } \begin{cases} h=1, & k=1, 2, \dots, n_1, \\ h=2, & k=1, 2, \dots, n_2, \\ \dots & \dots \\ h=r, & k=1, 2, \dots, n_r, \end{cases}$$

on voit que leur nombre est: $n_1 + n_2 + \dots + n_r$. Si l'on forme

$$\text{des systèmes en faisant: } \begin{cases} h=\alpha, & k=1, 2, \dots, n_\alpha, \\ h=\beta, & k=1, 2, \dots, n_\beta, \\ \dots & \dots \\ h=p, & k=1, 2, \dots, n_p, \end{cases}$$

on voit que leur nombre est: $n_\alpha + n_\beta + \dots + n_p$. Or les 2

tableaux contiennent les mêmes éléments, ce qui donne l'éth.

§4. — Multiplication: Si les r nombres n_1, n_2, \dots, n_r sont r à un même n , l'addition de ces r nombres s'appelle multiple de n par r :

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = rn$$

Il faut démontrer que le produit de n par r = prod. de r par n et qu'indépendamment que le prod. de n_1, n_2, \dots, n_r est indépendant de l'ordre des facteurs.

Qu'on forme tous les systèmes de r nombres (h_1, h_2, \dots, h_r) obtenus en donnant à :

$$\begin{cases} h_1 & \text{les valeurs } 1, 2, \dots, n_1 \\ h_2 & \text{---} & 1, 2, \dots, n_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ h_r & \text{---} & 1, 2, \dots, n_r \end{cases}$$

et qu'on les range dans l'ordre de grandeur de la quantité : $h_1 g^{r-1} + h_2 g^{r-2} + \dots + h_{r-2} g^2 + h_{r-1} g$ (càd. du nombre $h_1 h_2 \dots h_r$ ds le syst. à base g , g étant plus grand que n_1, n_2, \dots, n_r). (1) Soit S_1 le nombre des syst. où $h_1 = 1$; il y a donc le n. total est : $n_1 S_1$. Soit S_2 le nombre des syst. où $h_1 = 2$; il y en a $n_2 S_2$ ou $h_1 = 1, h_2 = 1, 2, \dots, n_2$; càd que : $S_1 = n_2$ donc le n. total est : $n_1 n_2 S_2$; et ainsi de suite; on trouve que le total est $n_1 n_2 \dots n_r$.

Si maintenant $\alpha, \beta, \gamma, \dots, p$ désignent les n. $1, 2, 3, \dots$ rangés dans un autre ordre, et qu'on range les syst. $h_\alpha h_\beta \dots h_p$ (les mêmes que ci-dessus) dans l'ordre de grandeur du nombre $h_\alpha h_\beta \dots h_p$ ds le syst. à base g , on trouvera de même que le nombre total de ces systèmes est :

$$n_\alpha n_\beta \dots n_p$$

$$n_1 n_2 \dots n_r = n_\alpha n_\beta \dots n_p$$

(1) Ce principe de classement équivaut au principe de l'ordre alphabétique employé dans les dictionnaires, si l'on représente $1, 2, 3, \dots$ par a, b, c, \dots

Le calcul algébrique.

L'introduction des indéterminées (Gauss) permet d'éviter les concepts étrangers à l'arithmétique pure, à savoir ceux des nombres négatifs, fractionnaires, et algébriques réels ou imaginaires.

On évite le concept de nombre négatif en remplaçant le -1 par une indéterminée x , et l'égalité par une congruence modulo $(x+1)$:

$$7-9 = 3-5$$

$$7+9x \equiv 3+5x \pmod{x+1}$$

Ensuite, cette congruence devient l'égalité précédente, quand on détermine x par la condition: $x+1=0$.

Hermann Schubert, *System der Arithmetik und Algebra*, Potsdam, 1885.)

On évite le concept de nombre fractionnaire en remplaçant le facteur $\frac{1}{m}$ par une indéterminée x , et l'égalité par la congruence: les règles de l'addition, de la mult^{en} et de la division:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an+bm}{mn}$$

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

fondées sur les congruences:

$$ax_m + bx_n \equiv (an+bm)x_{mn} \pmod{mx_m-1, nx_n-1, mn x_{mn}-1}$$

$$ax_m \cdot bx_n \equiv abx_{mn} \pmod{mx_m-1, nx_n-1, mn x_{mn}-1}$$

$$x_m \cdot \frac{bx_n}{x_n} \equiv an x_{bm} \pmod{mx_m-1, nx_n-1, bmx_{bm}-1, bx_n x_{bx_n}-1}$$

congruences résultent elles-mêmes des 3 identités suivantes:

$$ax_m + bx_n = (an + bm)x_{mn} + an x_{mn} (mx_m - 1) + bm x_{mn} (nx_n - 1) - (ax_m + bx_n)(mnx_{mn} - 1)$$

$$ax_m \cdot bx_n = abx_{mn} + abn x_n x_{mn} (mx_m - 1) + abx_{mn} (nx_n - 1) - abx_m x_n (mnx_{mn} - 1)$$

$$ax_m \cdot x_{bx_n} = anx_{bm} + anx_{bm} (mx_m - 1) - abm x_m x_{bm} x_{bx_n} (nx_n - 1) - ax_m x_{bx_n} (bm x_{bm} - 1) + amn x_m x_{bm} (bx_n x_{bx_n} - 1)$$

L'inégalité des fractions dérive de la règle d'addition

III. Introduction des nombres algébriques (cf. Éléments de la théorie arithmétique des grandeurs algébriques, t. 92, p. 114)

Théorème : 1^o Soit : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ une fonction entière à coefficients entiers de x ; $f'(x)$ sa dérivée. D la valeur absolue de son discriminant ;

2^o Soient $q(x), q_1(x)$ des fonctions à coefficients entiers de x respectivement de degré $(n-2)$ et $(n-1)$:

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k x^k, \quad q_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha'_k x^k$$

telles qu'on ait l'égalité : $q(x)f(x) + q_1(x)f'(x) = D$

3^o Soient les fonctions $f_1(x, y), \psi(x, y)$ définies par les égalités : $f(x+y) - f(x) = y f_1(x, y)$, $[f_1(x, y) - f'(x)] q(x) = y \psi(x, y)$ de sorte que dans leurs développements :

$$f_1(x, y) = \sum_{h,k} b_{h,k} x^h y^k \quad (h, k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\psi(x, y) = \sum_{h,k} c_{h,k} x^h y^k \quad (h, k = 0, 1, 2, \dots, 2n-4)$$

les coefficients b et c désignent des nombres entiers ;

Soit $|a_g|$ la plus grande des valeurs $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|$,
 s le plus petit nombre positif entier qui satisfait aux
 conditions de condition :

$$\begin{aligned} (s-1)D|a_n|^{n-2} &\geq \sum_b |a_b| (|a_g| + |a_n|)^b \quad (b=0, 1, 2, \dots, n-2) \\ (s-1)D|a_n|^{n-1} &\geq \sum_b |a'_b| (|a_g| + |a_n|)^b \quad (b=0, 1, 2, \dots, n-1) \\ (s-1)D|a_n|^{n-1} &\geq \sum_{b,k} |b_{b,k}| (|a_g| + |a_n|)^b \quad (b, k=0, 1, 2, \dots, n-1) \\ (s-1)D|a_n|^{n-1} &\geq \sum_{b,k} |c_{b,k}| (|a_g| + |a_n|)^b \quad (b, k=0, 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

on ne peut avoir : $\text{sign.} f(x') = -\text{sign.} f(x'') = \text{sign.} f(x''')$
 $x' < x'' < x'''$, et : $x''' - x' \leq \frac{1}{s}$.

$f(x)$ garde son signe dans tout intervalle de grandeur
 si elle a le même signe aux deux extrémités; et elle ne
 change qu'une fois de signe, si elle a des signes différents aux
 extrémités. De plus, dans ce second cas, si ε désigne un
 entier positif arbitraire, on peut déterminer dans l'intervalle
 un intervalle ^{partiel} de grandeur $\frac{1}{2sD}$ tel, que la fonction y change
 et y reste en valeur absolue inférieure à $\frac{1}{\varepsilon}$. Enfin la
 fonction $f(x)$ prend le signe de $a_n x^n$, dès que l'on a :
 $|x| > \frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} = R.$

Ensuite, si t est un nombre entier déterminé par les inégalités :

$$s(|a_g| + |a_n|) \leq t|a_n| < |a_n| + s(|a_g| + |a_n|) \quad \oplus$$

la fonction $f(x)$ ne peut changer de signe que dans un ~~un~~ des intervalles :

$$\left(-\frac{1}{s}, \frac{k}{s} \right) \quad \text{où } k = -t+1, -t+2, \dots, t-1, t.$$

où t est le nombre entier immédiatement supérieur à R , de sorte
 que $\frac{t}{s}$ est la valeur approchée par excès de R à moins de $\frac{1}{s}$ près.

Il suffit donc de déterminer les signes des $2t$ valeurs

$$f\left(\frac{k}{s}\right) \quad (k = -t+1, -t+2, \dots, t-1, t)$$

pour obtenir ceux des $(2t-1)$ intervalles où la fonction change de signe, et l'on sait qu'elle n'en change qu'une fois en chacun d'eux. Le nombre de ces intervalles est celui des racines réelles de

$$f(x) = 0$$

Le théorème précédent permet de déterminer des intervalles où la fonction change de signe et reste enval. abs. infér. d'ord. d'isol. les racines et d'en obtenir des valeurs aussi approchées qu'on le veut. (particul.)

L'existence des nombres algébriques irrationnels est fondée sur celle des racines réelles d'une équation algébrique à coefficients entiers. Sur le résultat de l'ordre des intervalles où chacun des $2n$ irrationnels comparés, considérés comme racines d'une même eq., se trouve isolé.

Pour rendre cette deduction tout à fait rigoureuse, on peut se passer de valeurs fractionnaires en posant: $x = \frac{z}{y}$; alors

$$f(x) = f\left(\frac{z}{y}\right) \quad \text{devient:} \quad \frac{1}{y^n} f(y, z)$$

La fonction homogène où y, z ne prennent que des valeurs entières.

Dans les résultats de l'arithmétique générale ou de la « théorie des fonctions entières à coefficients entiers d'indéterminés » on peut voir qu'une ^{synthèse} résumation de tous les résultats qu'on obtient en traitant des indéterminés des valeurs entières. — ~~Cette théorie~~ ^{Cette théorie} se rattache à l'arithmétique spéciale ordinaire, et tous ses résultats peuvent s'exprimer par les propriétés ~~simples~~ ^{simples} des nombres entiers. (sous une forme simple)

¶ Ces 4 inégalités signifient que S est le nombre entier qui dépasse d'au moins 1 unité les 4 fractions rationnelles: $\frac{f_1(R, 1)}{D}, \frac{q(R)}{D}, \frac{q_1(R)}{D}, \frac{\psi(R)}{D}$ où: $R = \frac{|a_2| + |a_n|}{|a_1|}$ et où l'on a remplacé les coefficients de f_1, q, q_1, ψ par leurs valeurs absolues.

Q. Stolz (in Innsbruck). Bernhard Bolzano's Bedeutung
in der Geschichte der Infinitesimalrechnung.

Mathematische Annalen, t. XVIII (1881.)

Bolzano (né à Prague en 1781, mort à Prague en 1848.)

1. Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik.
Prague, 1810.

2. der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der
polynomische und die Rechen, die zur Berechnung der
Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als
früher erwiesen. Prague, 1816.

3. Rein analytischer Beweis, des Lehrsatzes, dass zwischen
je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat
gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung
liege. Prague, 1817.

4. die drei Probleme der Rectification, der Complanation
und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich Kleinen,
ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend
eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich
als Probe einer gänzlich neuen Umgestaltung der Raumwissenschaft
allen Mathematikern zur Prüfung beigelegt. Leipzig, 1817.

5. Dr. Bernhard Bolzano's Paradoxien des Unendlichen,
herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers
von Dr. Fr. Prihonsky. Leipzig, 1851.

— Dans les Beiträge, on trouve l'addition de deux nombres
fondée sur l'axiome de Grassmann: $a + (b+1) = (a+b) + 1$.
(cf. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, p. 37.)
Hankel attribue à Bolzano la priorité sur Cauchy dans la juste
conception de la théorie des séries infinies.

Bolzano, comme Cauchy, a rigori la notion de convergence uniforme, introduite par Weierstrass. Corn Seidel qui a remarqué la convergence non uniforme des séries.

(2) Lemme général pour l'égalité de deux nombres.

Si dans l'équation: $A + w = B + w'$

les grandeurs w, w' peuvent devenir aussi petites qu'on veut, tandis que A et B restent invariables, on a rigoureusement

$$A = B.$$

Limite supérieure d'une variable —

(3) Théorème. Si une propriété M n'appartient pas à toutes les valeurs d'une variable x , mais à toutes celles qui sont plus petites qu'une certaine valeur u , il y a toujours une grandeur V qui est la plus ^{petite} ~~grande~~ de celles dont on peut dire que toutes celles qui leur sont inférieures possèdent la propriété M .

Bolzano remplace par ce théorème l'axiome faux qui voici:

Si une propriété M n'appartient pas à toutes les valeurs de x , mais à toutes celles qui sont plus petites qu'une certaine valeur, il y a toujours une valeur maxima qui possède la propriété M .

La grandeur V est, selon Weierstrass, la limite supérieure de toutes les valeurs de x qui possèdent la propriété M . D'où la proposition:

« Si toutes les valeurs (ou nous le disons) d'une variable x sont inférieures à un nombre A , il y a un nombre fini V , et un seul, tel que aucune des valeurs de x ne la dépasse, mais qu'il y en ait au moins une, dont la différence avec V soit moindre que tout (nombre positif & aussi petit qu'on veut) »

Gi. Darboux, Fondamenti per la teoria delle funzioni... Pisa, 1878.

Guhamel, des Méthodes dans la science de raisonnement, II, p. 113.

Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues

Corollaire: Si une fonction croît constamment quand la variable x tend vers la limite a , mais reste inférieure à un nombre fini, elle a une limite finie pour $x = a$.
 (3, § 6.) Si à la série: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ —
 on fait correspondre la suite des sommes des n premiers termes:

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

et si la série est convergente, la différence entre S_n et S_{n+r} (pour r grand que soit ε) reste plus petite que chaque grandeur donnée, pourvu qu'on ait pris n suffisamment grand (condition nécessaire).
 (Cf. Cauchy, Cours d'Analyse, p. 125.)

§ 7. Si une suite: $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ est telle que la différence entre S_n et S_{n+r} (si grand que soit ε) reste plus petite que chaque grandeur donnée, pourvu qu'on prenne n suffisamment grand, il y a toujours une grandeur, et une seule, dont les termes de cette suite approchent de plus en plus et dont ils peuvent différer aussi peu qu'on veut, si l'on prolonge la suite suffisamment loin.

— Fonctions continues. —

1) Une fonction $f(x)$ est continue au voisinage de la valeur x , si la différence: $f(x+w) - f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, en prenant w suffisamment petit.

Corollaire: Si deux fonctions de x , $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont continues pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β , et si l'on a:

$$f(\alpha) < \varphi(\alpha)$$

$$f(\beta) > \varphi(\beta)$$

il y a toujours une valeur de x , comprise entre α et β , pour laquelle on a:

$$f(x) = \varphi(x).$$

(Cf. Cauchy, Cours d'Analyse, p. 460)

Cette vérité, que toute fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires, résulte de

La définition de la continuité, loin de pouvoir en tenir lieu, car elle n'est pas suffisante pour définir la continuité.

(k) Si deux fonctions $F(x)$, $F'(x)$ sont définies et uniformes dans l'intervalle $(a, a+h)$, continues pour $x=a$, et si la différence $|F(x) - F'(x)|$ peut être rendue plus petite qu'un nombre donné, en prenant x suffisamment voisin de a , on a :

$$F(a) = F'(a).$$

— Rectification des courbes.

(h) Bolzano définit la longueur d'une courbe sans invoquer l'axiome d'Archimède, ni supposer que le rapport de l'arc à la corde a pour limite 1 quand celle-ci tend vers 0. Il pensait au contraire que ces propositions devaient se déduire de la formule de rectification. Seulement il a eu le tort de considérer la longueur d'une ligne continue comme une grandeur mesurable, sans condition (V. Duboulet, III, p 386).

— Appendice: sur la Rectification des courbes.

Les géomètres grecs considéraient deux lignes finies ou deux arcs finis quelconques comme comparables entre elles. Archimède suppose 1° que de toutes les lignes ayant mêmes extrémités, la droite est la plus courte; 2° que de deux lignes ayant mêmes extrémités, si l'une d'elles est dans un même plan et l'autre est courbée, la droite est la plus courte. Il attribue donc un rapport à deux grandeurs quelconques. Or Euclide (V, déf. 4) dit que deux grandeurs ont un rapport quand la plus petite peut multiplier, dépasser la plus grande. D'où l'énoncé des postulats de Archimède (Desphora et cyclindres). Quand deux lignes, surfaces ou solides sont inégaux, l'exces de la plus grande sur la plus petite est aussi grand pour qu'il devienne plus grand qu'une certaine partie de l'exces des grandeurs comparées.

Cf. Duhamel (II, p. 411)

P. du Bois-Reymond (op. Mathematische Annalen, t. XV)

Soit une courbe exprimée par la fonction uniforme et continue $y = f(x)$, entre les points A et A' , d'abscisses a et a' . On intercale $(n-1)$ points A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , d'abscisses a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , (dont les intervalles sont : $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$).

Si la fonction uniforme et continue $y = f(x)$ possède pour tous les points de l'intervalle (a, a') , sauf peut-être pour un ensemble fini de points, une dérivée qui forme ~~une fonction~~ pour beaucoup des autres points une fonction finie intégrable dans l'intervalle (a, a') , et le périmètre du polygone I_n a, quand les δ décroissent indéfiniment, une limite finie I_0 qui est :

$$I_0 = \int_a^{a'} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$f(a_i) = b_i$, on a (en coord. rectang.) : $I_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{b_i - b_{i-1}}{\delta_i}\right)^2} \delta_i$

Définition arithmétique de l'intégrale définie (Weierstrass)

Soit $f(x)$ une fonction définie uniforme ^{sur} pour toutes les valeurs de l'intervalle (a, a') , soit pour un ensemble de valeurs partout condensé dans cet intervalle, et dont toutes les valeurs sont comprises entre deux nombres finis. On partage l'intervalle $(a' - a)$ en n parties δ :

$$a = a_0, a + \delta_1 = a_1, a_1 + \delta_2 = a_2, \dots, a_{n-1} + \delta_n = a_n = a';$$

on prend pour x_i une valeur quelconque comprise entre a_{i-1} et a_i —

Pour que la somme $\sum_{i=1}^n \delta_i f(x_i)$ ait une limite finie J quand les δ décroissent indéfiniment, il faut et il suffit qu'à tout nombre positif ϵ corresponde un nombre pos. ρ tel qu'on ait l'inégalité :

$$\left| \sum_{i=1}^n \delta_i f(x_i) - J \right| < \epsilon$$

pour toutes les valeurs des δ plus petites que ρ (leur somme étant $a' - a$ toujours) $(\delta_i > 0)$

Le nombre J s'appelle, par définition, l'intégrale définie :

$$\int_a^{a'} f(x) dx.$$

Or, en vertu des hypothèses faites pour la dérivée de $f(x)$,
on a, par le théorème de la moyenne (d'O. Bonnet):

$$I_n = \sum_1^n \left| \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \right| \delta_i \quad a_{i-1} < x_i < a_i$$

Mais si $f'(x)$ est intégrable dans l'intervalle fini (a, a')

$\sqrt{1 + f'(x)^2}$ l'est aussi; donc: $\lim_{\delta_i \rightarrow 0} I_n = I$

càd: $\lim \sum_1^n \left| \sqrt{1 + \left(\frac{b_i - b_{i-1}}{\delta_i} \right)^2} \right| \delta_i = \int_a^{a'} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Si: $\int_a^{a'} f'(x) dx$ est absolument convergente,

$\int_a^{a'} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ est aussi convergente; si la première
intégrale est infinie, la seconde l'est aussi.

On peut donc imaginer des arcs de courbe continus
pour lesquels la somme I_n croît indéfiniment quand
les δ décroissent indéfiniment. Soit la courbe:

$$x=0, y=0; \quad x \geq 0, \quad y = \int_0^x \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Aussait qu: $\int \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx = \pm \infty$

Donc tout arc de cette courbe, depuis 0 jusqu'à un
point quelconque, a une longueur infinie.

On voit qu'on ne peut admettre qu'un tout arc continu
ait une longueur représentée par un nombre. Il faut
d'abord que cet arc soit mesurable.

— L'existence d'un nombre représentant l'aire
d'une courbe entre deux abscisses finies résulte de l'existence
de l'intégrale définie: $\int_a^{a'} f(x) dx$
tandis qu'Darbouillet fonde l'existence de l'intégral défini
sur celle du nombre qui mesure l'aire. (II, note, III, 3nd.)

Carnot (Théorie des fonctions, I, 296) soutient que le nombre
qui mesure la surface peut être conçu sans passage à la limite,
mais non le nombre qui mesure l'arc. M. de Lilly (ap. Mémoires
de la Société des sciences physiques de Bordeaux, 2e série, t. III, 87)
rappelle que l'existence du nombre qui mesure l'aire ne résulte pas
uniquement du passage à la limite on peut considérer les polygones
inscrits et circonscrits, mais n'est assurée que quand ce même nombre
apparaît aussi comme la limite de la somme des parties (à
contour rectiligne) dans lesquelles la surface donnée est décomposée
par deux systèmes de cordes.

2. Poincaré (1) ap. Journal de Liouville-Jordan, 2^e série, t. VIII

(1892)
G. Dedekind, Théorie des nombres entiers algébriques (Gr. N. 1877)

On appelle nombre algébrique toute racine de l'équation:

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

dont les coefficients a_i sont des nombres entiers ordinaires.
Ce nombre algébrique est dit entier si le coefficient $a_m = 1$.

Considérons maintenant tous les nombres de la forme suivante:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1} \quad (2)$$

où les coefficients α_i sont des nombres rationnels ordinaires, et où x satisfait à l'équation (1). Ce sont évidemment des nombres algébriques, et nous dirons qu'ils appartiennent tous au corps défini par l'équation (1).

Paran les nombres algébriques qui font partie d'un corps, nous distinguons ceux qui sont entiers, et nous dirons qu'ils appartiennent à un système de nombres complexes, système défini par l'équation (1).

Il résulte de ces définitions que la somme et le produit de deux nombres complexes d'un système sont deux nombres complexes du même système.

Pour éclaircir ces définitions, supposons que l'éq (1) s'écrive:

$$x^2 + 3 = 0$$

Les nombres du corps correspondant seront de la forme:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{-3}$$

α_0 et α_1 étant rationnels. Si α_0 et α_1 sont entiers, le nombre y sera certainement un nombre entier algébrique, et appartiendra par conséquent au système de nombres complexes considéré.

(1) Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes du H. Echebicheff

Mais cette condition n'est pas nécessaire. Si, en effet, $2\alpha_0$ et $2\alpha_1$ sont deux entiers impairs, nous aurons:

$$4\alpha_0^2 \equiv 4\alpha_1^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

et par conséquent:

$$4\alpha_0^2 + 12\alpha_1^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

Le nombre y sera donc entier algébrique et fera partie du système, puisqu'il satisfera à l'équation:

$$y^2 - 2\alpha_0 y + (\alpha_0^2 + 3\alpha_1^2) = 0$$

dont les coefficients sont entiers.

Cela posé, considérons p nombres complexes d'un même système:

$$y_1, y_2, \dots, y_p.$$

Soyent ensuite: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$

p nombres complexes arbitraires appartenant au même système.

$$\text{Le nombre: } Z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_p y_p$$

fera évidemment encore partie de ce système. L'ensemble de tous les nombres complexes Z que l'on obtient, en donnant aux coefficients complexes arbitraires α_i toutes les valeurs possibles, s'appellera un idéal, et les p nombres y_i formeront la trame de cet idéal.

Deux nombres complexes u_1 et u_2 sont congruents par rapport à un idéal, quand leur différence $u_1 - u_2$ fait partie de cet idéal; on peut dire aussi qu'ils ~~font partie~~ ^{appartiennent} à la même classe par rapport à cet idéal. L'ensemble des classes entre lesquelles les nombres complexes se répartissent ainsi par rapport à un idéal donné, s'appelle la norme de cet idéal.

Un idéal A est divisible par un autre idéal A' , quand tous les nombres complexes qui appartiennent à A font aussi partie de A' .

Note de M. Kronecker sur les travaux
algébriques (Monatsberichte der Akademie
der Wissenschaften zu Berlin - 27 juin 1861.)
Trad. par Houel. des Ann. de l'École
Normale Supérieure, t. III, 1866.

Théorème d'Abel.

Si une équation est résoluble algébriquement,
on peut toujours donner à la racine une forme
elle, que toutes les fonctions algébriques dont elle
se compose soient exprimables par des fonctions
rationnelles des racines de l'équation proposée.

~~Kronecker~~ (cf. Vorlesungen über Zahlentheorie,
de Dirichlet.)
Dedekind.

Sur la théorie des nombres entiers algébriques:
Bulletin des Sciences math. t. 11, 1876, p. 278 —
t. 1, 1877, p. 17, 69, 144, 207.

Sur la théorie des nombres complexes idéaux.
Comptes rendus de l'Académie des Sciences,
t. 90, 1880, p. 1205.

La notion de congruence a été introduite par Gauss;
Disquisitiones arithmeticae, art. 1.

Un nombre θ est dit un nombre algébrique lorsqu'il satisfait à une équation :

$$\theta^n + a_1 \theta^{n-1} + a_2 \theta^{n-2} + \dots + a_{n-1} \theta + a_n = 0$$

de degré fini n et à coefficients rationnels a_i .
il est dit un nombre entier algébrique quand tous les coefficients sont des nombres entiers rationnels ($\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$).

De cette définition il résulte que la somme, la différence et les produits de nombres entiers sont tous aussi des nombres entiers.

1
ms
/

=

2. q

na

lio

me

ou

ms

ms

374 C

verité
de
ance.

École Normale Supérieure.



Paris, le

18

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous remercier que
vous ayez emprunté à la Bibliothèque de l'École

Normale Supérieure.

Je vous prie de vouloir bien nous rendre le plus
bientôt possible l'ouvrage désigné ci-dessus.
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance
de ma considération la plus distinguée.
Le Bibliothécaire,
Le Bibliothécaire,

Définissons maintenant le produit de deux idéaux A et B .

Supposons que la trame de A se compose de nombres complexes;

y_1, y_2, \dots, y_p
et celle de B des nombres complexes.

z_1, z_2, \dots, z_q

Celle du produit AB se composera des pq nombres complexes

$z_i y_k \quad (i = 1, 2, \dots, q \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, p)$

Il est clair que le produit AB est divisible par A et par B ,
mais M. Dedekind a démontré la réciproque, à savoir que
si un idéal est divisible par A , il sera le produit de A
par un autre idéal C .

La norme du produit de deux idéaux est égale au produit
des normes de ces idéaux.

L'idéal unité est celui dont la trame se réduit à un nombre 1,
et qui se compose, par conséquent, de tous les nombres complexes
du système. Sa norme est égale à 1. Un idéal quelconque est
divisible par l'idéal unité.

Un idéal est premier s'il n'est divisible que par lui-même
ou par l'idéal unité. M. Dedekind a alors démontré son
théorème fondamental: Un idéal quelconque peut toujours
être décomposé, d'une manière et d'une seule, en facteurs
idéaux premiers.

Il peut arriver que deux trames

y_1, y_2, \dots, y_p

y'_1, y'_2, \dots, y'_q

soient équivalentes et donnent naissance au même idéal.

On peut donc se proposer le problème suivant: Étant donné un
idéal défini par ses trames, réduire cette trame à sa plus simple
expression, c'est la remplacer par une autre trame équivalente,

de façon à abaisser autant que possible le nombre des entiers complexes dont elle se compose. Ce nombre peut généralement être réduit à deux, et quelquefois à un. Dans ce dernier cas l'idéal se compose de tous les multiples de l'entier complexe unique qui en forme la base, et l'on dit que c'est un idéal principal.

Considérons maintenant trois idéaux A, B, C qui ne soient pas principaux, et supposons que les produits AC et BC soient des idéaux principaux. Nous dirons alors que les deux idéaux A et B appartiennent à la même classe. Le nombre des classes entre lesquelles se répartissent ainsi les idéaux (et qu'il ne faut pas confondre avec les classes entre lesquelles se répartissent les nombres complexes par rapport à un idéal donné) est fini.

Nous considérerons en particulier le système d'idéaux qu'on obtient en partant de l'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

Le système des nombres complexes correspondants se compose donc de tous les nombres complexes de Gauss:

$$a + bi$$

où a et b sont entiers.

Il n'y a qu'une seule classe d'idéaux, et tous les idéaux sont principaux. Un idéal quelconque se compose donc de tous les multiples d'un nombre complexe $a + bi$, qui formera la base, et aura pour norme $a^2 + b^2$, et pourra être représenté tout court par le symbole $a + bi$.

Deux nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ peuvent donner naissance au même idéal, si :

$$\begin{cases} c = b \\ d = -a \end{cases}$$

ou si :

$$\begin{cases} c = -a \\ d = -b \end{cases}$$

ou si :

$$\begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases}$$

car alors $a + bi$ et $c + di$ sont multiples l'un de l'autre : les deux idéaux qu'ils représentent sont donc identiques.

Lettre de M. Weierstrass à M. Schwarz, communiquée
à la Société royale des sciences de Göttingue le 4^{ème} déc.
1883, publiée dans les Nachrichten de 1884, n° 10.

Selon Weierstrass, si Gauss n'admettait pas de hauteurs
de grandeurs à plus de deux dimensions, c'est parce que
le produit de deux telles grandeurs peut s'annuler
sans qu'aucune d'elles ne s'annule. (M. Dedekind
est d'un avis différent; il pense que Gauss a entre vu
la raisonnable raison, à savoir que ces grandeurs sont
réductibles aux nombres complexes ordinaires.)

On pose:

$$a = \sum_i \alpha_i e_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$b = \sum_i \beta_i e_i$$

D'où: $a+b = \sum (\alpha_i + \beta_i) e_i$, $a-b = \sum (\alpha_i - \beta_i) e_i$.

$$ab = \sum_i \alpha_i \beta_i \cdot e_i e_i$$

Pour que le produit ab soit de même forme que ses
facteurs, il faut que: $e_i e_i = \sum_a \varepsilon_{abc} e_a$

d'où: $ab = \sum_{abc} (\varepsilon_{abc} \alpha_b \beta_c) e_a$

Pour que le quotient de 2 nombres soit de même forme,
il faut que: $\frac{a}{b} = \sum_a \gamma_a e_a$

Pour qu'il soit bien déterminé, il faut que les équations

$$\alpha_a = \sum_b (\varepsilon_{abc} \beta_b \gamma_c) e_a \quad (\text{qui déterminent les } \gamma)$$

soient déterminées, c'est-à-dire que leur déterminant

$$\Delta = \left| \sum_b \varepsilon_{abc} \beta_b \right|$$

ne soit pas nul identiquement (c'est-à-dire pour tout système
de valeurs attribuées aux β)

Dans ce cas, il y aura un module de la multiplication

$$e_0 = \frac{a}{a} \quad \text{d'où:} \quad ae_0 = e_0 a = a.$$

Une équation algébrique entre nombres complexes:

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + l = 0$$

devient à l équations entre leurs composantes

$$(2) \quad x_k^m + a_k x_k^{m-1} + b_k x_k^{m-2} + \dots + l_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, l)$$

ce sont des eq. algébriques à coefficients réels ou imaginaires qui ont en gén. m racines réelles ou imaginaires à moins que leurs coefficients ne soient nuls.

Or, si tous les coefficients de l'eq. (1) ont un commun diviseur, ils contiennent un facteur un diviseur de l'eq. (1). D'autre part, si une des eq. (2) a une infinité de racines, l'eq. (1) en aura une infinité. Donc une eq. alg. entre nombres complexes à n unités ne peut avoir une infinité de racines que si tous ses coefficients contiennent un facteur un diviseur de l'eq. (1).

De plus, si une des eq. (2) est à coefficients réels, elle n'aura pas en gén. ses m racines réelles, car que le composant x_i qu'on en tirera ne sera pas à 1 unité capitale, comme cela devrait être. Pour que l'eq. (1) n'ait pas de racines imaginaires, c'est-à-dire pour que toutes ses racines (au nombre de m^2) appartenant à l'ensemble considéré, il faut en gén. qu'il suffise, que tous les ensembles partiels soient à 2 unités, c'est-à-dire qu'il n'y en ait que $\frac{n}{2}$. Alors le nombre des racines appartenant à l'ensemble sera sûrement $m^{\frac{n}{2}}$.

Weierstrass: Abhandlungen aus der
Functionenlehre. Berlin, Springer, 1886.

1. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen
aus den Abh. der K. Akad. d. W. zu Berlin 1876.
2. Ueber einen functionentheoretischen Satz d. H. Mittag-Leffler
aus den Mon. ber. d. K. Acad. d. W. zu Berlin 1880.
3. Zur Functionenlehre " 1880.
4. Nachtrag " 1881.
5. Einige auf die Theorie der analytischen Functionen
mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze.
6. Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen
Functionen von mehreren Veränderlichen 1876.
7. Ueber die Theorie der analytischen Facultäten.
aus Crelle t. LI, 1856.

378 B

Dedekind: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen (Nachrichten, 1885, [no 4.])

Cf. § 159 de la 2^e éd. (1871) des Leçons sur la théorie des nombres, de Dirichlet.

Dedekind considère un syst. de n^2 quantités :

$$e_r^s \quad (r, s = 1, 2, \dots, n)$$

telles que les n unités capitales se transforment par substitution linéaire en les n quantités :

$$e_1^s, e_2^s, \dots, e_n^s.$$

On suppose le déterminant des e_r^s différent de zéro.

On peut en déduire un système de n unités capitales (normal) telles que :

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ \dots + e_n & e_r & e_s = 0 & (r \neq s) \end{matrix} \quad e_r e_r = e_r.$$

On suppose le système irréductible, c-à-d qu'il n'existe pas de système de coordonnées x tel qu'un seul système de coordonnées :

$$x = \sum e_i \xi_i$$

On a donc, si :

$$y = \sum e_i \eta_i$$

la formule du produit :

$$xy = \sum e_i \xi_i \eta_i$$

On dit que $n > 1$, on peut avoir : $xy = 0$ sans que ni x ni y soient nuls. En effet, il suffit pour cela que certains composants de x soient nuls, ce qui annule les composants correspondants de xy , et que ceux des composants de y qui ne correspondent pas à ceux-là soient aussi nuls, ce qui annule tous les autres composants de xy . [Par exemple, si : $x = x_1 e_1 + 0 e_2$
 $y = 0 e_1 + y_2 e_2$
 $xy = 0 e_1 + 0 e_2 = 0.$

Donc l'équation : $ax = 0$

et en gén. toute eq. algébrique a une infinité de racines non nulles (si a est un diviseur de zéro)

Toutes les relations entre nombres complexes à n unités sont déterminées par les relations :

$$e_r e_s = \sum_i e_i \eta_{i,rs}$$

cà d par le système des coefficients $\eta_{i,rs}$ (Euler de Weierstrass)

Des lois commutative et associative :

$$e_r e_s = e_s e_r \quad (e_r e_s) e_t = (e_r e_t) e_s$$

résultent les équations de condition suiv. entre les η

$$\eta_{t,rs} = \eta_{t,sr} \quad \sum_u \eta_{u,ti} \eta_{i,rs} = \sum_i \eta_{u,si} \eta_{i,rt}$$

$(r, s, t, u = 1, 2, \dots, n)$

Inversement, si l'on se donne le système des $\eta_{i,rs}$, on en peut déduire un système de n unités capitales e_1, e_2, \dots, e_n .

Une équation algébrique entre les n unités capitales n'est vraie que si elle est vérifiée par chacun des systèmes de leurs composants : $e_1^s, e_2^s, \dots, e_n^s$.

(on pose : $e_r = e_r^1 + e_r^2 + \dots + e_r^n$)

Remarque. M. Weierstrass donne pour éléments ses nombres complexes du nombre réels ; M. Dedekind prend pour éléments des nombres imaginaires (ou réels) de sorte qu'il y a toujours n ensemble partiels, et que chaque nombre a toujours n composants.

Ch. Méray: Les fractions et les quantités négatives. (Gauthier Villars, 1890.)
 extrait de Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses
 applications géométriques, par M. M. Méray et Riquier.)
 extrait des Nouvelles Annales de Mathématiques, 3^e série,
 tomes VIII et IX.)

Théorie élémentaire des fractions dépourvue de toute considération
 impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'inten-
 sion des grandeurs concrètes.

Résultat de la multiplication de E par n et de la division
 du produit par d (non nul), si cette division est possible,
 peut s'écrire :

$$E \times \frac{n}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{d} \times E$$

Pour conserver les avantages de cette notation même quand n
 n'est pas divisible par d , on convient de représenter même alors
 le résultat de l'opération indiquée par le signe : $E \times \frac{n}{d}$,
 produit du nombre E par le facteur fictif $\frac{n}{d}$.

Quand E est divisible par d , l'opération revient à prendre
 n d'uns de E ; d'où la signification de la fraction.

Définitions : $\frac{n}{d} \geq \frac{n'}{d'}$ suivant que $nd' \geq n'd$

Donc : $\frac{n}{d} = \frac{kn}{kd}$

La division est toujours possible, sauf quand le diviseur est nul ($\frac{0}{d}$)
 Les entiers ont un commun car particuliers dans les fractions ($\frac{e}{1}$)

Propriétés de l'ensemble des nombres fractionnaires :

On peut toujours trouver une fraction plus petite qu'une fraction donnée.

On peut toujours trouver deux fractions différant d'autant peu qu'on veut.

Grandeurs commensurables : idée du rapport de 2 grandeurs.

L'extension de la notion de rapport à deux grandeurs qui théoriquement ne sont pas commensurables, par suite la généralisation complète de celle de mesure, exigerait sur les nombres abstraits commensurables qu'un développement. ... Pratiquement, d'ailleurs, deux grandeurs simultanées sont toujours commensurables; car, pour nos sens, toute grandeur est la somme d'une autre égale entre elles, pourvu que la portion de celle-ci rende imperceptible toute grandeur mesurée.

Théorie des quantités négatives.

Confusion entre les signes opératoires $+$, et $-$, et les signes constants des quantités positives et négatives.

Introduction des quantités positives et négatives \vec{a} , \overleftarrow{a} , et de la quantité neutre (de valeur absolue nulle) $\overleftrightarrow{0}$.

Quantités égales, opposées.

Règle de l'addition des quantités qualifiées. Soustraction.

Définition de l'inégalité de deux quantités qualifiées (différence pos. ou nég.)

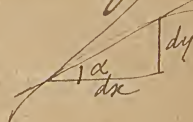
Règle des signes dans la multiplication. Quotient.

On peut changer les additions en soustractions, et réciproquement, en changeant les noms des quantités qualifiées; et inversement, on peut changer le nom de ces quantités en changeant les signes d'opérations.

C'est ainsi qu'on ramène une polynôme à ne contenir que les opérations $+$; alors on le sous-entend, et on indique les termes pos. et nég. par les signes $+$ et $-$, devenus signes qualificatifs. On peut aussi réduire tous les termes à des positifs, alors les opérations coïncident avec les opérations arithmétiques; de où la confusion possible du nom de positifs avec leur valeur absolue, et de la quantité neutre $\overleftrightarrow{0}$ avec le 0 arithmétique.

Carnot: Métaphysique du calcul infinitésimal

De ce que les infiniment petits peuvent être rendus aussi petits qu'on veut, il ne s'ensuit pas qu'on puisse les négliger dans les formules avec toute rigueur, car on ne peut pas les prendre nuls, sans que les formules n'aient plus de sens. Par ex le coeff. ang. de la sécante est $\frac{dy}{dx}$, on peut rendre dx & dy aussi petits qu'on veut, mais on n'a jamais qu'une sécante, et si l'on a la tangente, il faut annuler dx & dy ; mais alors le rapport n'a plus de sens (p. 36, Carnot admet cette objection). De plus, il n'est pas toujours vrai qu'on puisse rendre les différentielles si petites qu'on le veut sans changer la valeur des quantités fixes; en: si l'on prend dx & dy finis, on n'a pas le même angle α qu'au moment où dx , dy s'annulent. Dans tout ce que ces quantités sont, d'ailleurs aussi petites qu'on veut, on a pas rigoureusement l'angle α ; et quand on a l'angle α , ces quantités n'existent plus.



Les mathématiciens distinguent soigneusement les quantités très-petites ou très-petites des infiniment grands ou infiniment petits, et savent que dans le 1er cas ils commettent une erreur dont ils savent un a priori une limite supérieure, et que dans le 2e cas ils en commettent aucune (c'est la diff. des séries mathématiques & des séries astronomiques).

C'est un fait historique, c'est que l'inventeur du calcul infinitésimal ne considérait sa méthode comme une méthode de compensation. Il n'y a rien de plus naturel de concevoir l'infiniment petit comme $\frac{1}{n}$, prenant des valeurs de plus en plus grandes.

Selon C. les seules équations exactes auraient lieu entre quantités finies.
 Les éq. différentielles seraient nécessairement inexactes. Or il résulte de ce que
 que celles-ci expriment des relations tout aussi rigoureuses que celles-ci.
 Pour le montrer, il suffit de mettre des dérivées à la place des différentielles.
 Entout cas, le calcul infinitésimal n'a pas simplement pour but de
 trouver des relations entre quantités finies, et les éq. différentielles
 les inf-petits ou les dérivées ne sont pas nécessairement exactes.
 Exemples: expression du rayon de courbure; de l'élément linéaire
 d'une surface.

p 45, 48: Comment, en donnant des égalités entre inf-iniment
 dont on ne peut affirmer l'exactitude, ~~universelles~~ ^{peut-on affirmer qu'on obtient}
 rigoureuses entre quantités finies? Il se pourrait qu'en s'additionnant
 les erreurs inf-iniment petites commises dans chacune des des égalités
 donnant lieu à une erreur finie dans l'égalité finale, qui ne
 soit dépourvue de l'exactitude.

p 75. Les équations différentielles ne sont pas des équations imparfaites.

p 86. L'égalité: $S = \int y dx + C$ n'est pas imparfaite.

p 95. rigoureuse, tout autant que l'égalité entre termes finis qu'on obtient
 en effectuant le intégral, et dont elle est le symbole.

p 96. L'égalité: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ n'est pas imparfaite.
 encore moins: $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

p 101. La sous-tangente est $y \frac{dx}{dy}$, et non inf-iniment peu différente
 d'elle. Il suffit de remplacer $\frac{dx}{dy}$ par $\frac{1}{y'}$ pour avoir une expression
 finie et rigoureusement exacte.

p 132. Le raisonnement qui considère la pyramide comme formée de
 nombre essentiellement finis de tranches (ce qui est nécessaire)
 qu'on puisse appliquer la formule $\sum_{i=1}^n n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Plus valable quand le nombre devient infini. Pourquoi vient
 tout qu'il donne à la limite un résultat exact? C'est en
 de la continuité, qui fait que les propriétés trouvées pour des
 finies ^{restent vraies} ~~subsistent~~ à l'infini, c'est-à-dire que les relations prouvées
 composant le continu suivant un nombre arbitraire subsistent
 la décomposition, supposée achevée, dépasse tout nombre, ou
 ne deviennent rigoureusement exactes que lorsque la division
 tout nombre, et rejoint la continuité par l'artifice
 de l'infini. L'introduction du nombre était une
 erreur; cette erreur ne s'élimine que par la considération
 fine, qui exclut cette dernière et établit la continuité.
 C'est la critique de la théorie de Carnot, qui voit dans l'infini une cause d'incertitude.
 Il est bien remarquable que la considération des limites (des
 séries) ne suffise pas au calcul infinitésimal, et qu'il faille traiter
 les différentielles comme des quantités existant par elles-mêmes.
 C'est-à-dire, si on que les quantités infiniment petites ne sont
 une simple fiction, mais ont leur raison d'être dans la nature
 correspondent à quelque chose de réel? La vérité et l'utilité des
 calculs où les différentielles figurent est une preuve a posteriori
 la légitimité de cet algorithme. (Cf. Cournot, Essai, § 201.)
 On connaît par la définition rigoureuse de la limite, et croit
 elle implique nécessairement l'idée d'infiniment petit.
 On voit ici combien l'introduction des n négatifs paraissait
 étrange et quasi monstrueuse à Carnot. En effet, et présentée
 généralisation des solutions de l'éq. du 1^{er} degré, elle devient
 scandaleuse et paradoxale. Aussi une solution négative est-elle
 désignée comme un symbole d'impossibilité, tandis qu'elle est aussi
 et aussi exacte qu'une solution positive (dont elle est symétrique)
 même, $\frac{m}{0} = \infty$ est un symbole d'impossibilité, ~~pour~~ ^{l'action considérée}

à résultats au p. de vue droit du nombre; mais donne solution
~~exacte~~ admissible et exacte dans la plupart des cas (en géométrie)

Exemple: $\frac{x}{b} = \frac{bx}{a}$



$x = \frac{bl}{a-b}$ pour

Cette solution $x = \infty$

correspond à une position parfaitement déterminée de la sécante
 et nullement à une impossibilité du problème

p 178: C'est l'embarras de difficultés inutiles que des l'imagination qui
 fait des hypothèses contradictoires, pour expliquer les sol. négatives.
 La logique de C. est bien sévère et bien étroite. On ne peut pas d'avance
 se le résultat est gain ou perte; pourquoi dire qu'on s'est trompé
 l'hypothèse? On est convenu que le signe + exprime l'augmentation
 la perte; cela ne fait pas 2 problèmes différents selon le signe de la
 tout au plus l'échange en langage vulgaire ^{mais} peut-il être modifié
 C. ne veut pas qu'on appelle une perte un gain négatif; mais n'appelle
 pas accroissements des variations qui peuvent fort bien être des
 négatives, sans que ce langage offre la notion de contradiction?
 le principe de Carnot; ce qu'on appelle vitesse perdue peut aussi
 être ~~une~~ un accroissement de vitesse pris négativement.
 est souvent

p 182: On ne peut pas dire qu'une valeur négative est fautive. Les signes
 ne marquent pas seulement les opérations, mais les sens dans lequel on
 porte les grandeurs linéaires. (Cf. Cauchy et Bode)

p 183: C. pressent la distinction du signe apparent et du signe réel

p 184: Toutes les difficultés disparaissent avec la convention du sens in de
 parler signes. Il serait étrange qu'un sig. ne fût vrai que de un quant.

p 191: L'exemple des sécantes est spécieux; mais leur sens est défini par
 à l'extrémité de l'arc auquel elles correspondent, et pas conséquemment
 signes sont opposés, bien qu'elles coïncident géométriquement.
 la sécante est plutôt une quantité analytique que géom: c'est

p 199: C. entrevoit que la Algèbre est l'étude des quantités positives et négatives
 et n'y a pas d'hypothèses contradictoires à la base des n négatifs; et ce p
 n'est pas fait pour fortifier la théorie des erreurs compensées.

(Cohen)

Rudolf Lipschitz: Schreibuch der Analysis. Bonn, 1877.

1^{er} Volume: Grundlagen der Analysis.

Section I: Calcul des grandeurs déterminées (disiques.)

Ch. I: Eléments de la théorie des nombres entiers.

Ch. II: Calcul des fractions.

Ch. III: Calcul des puissances à exposants entiers ou fractionnaires.
Calcul des grandeurs rationnelles et irrationnelles.

Section II: Eléments d'Algèbre.

Ch. I: Définition de l'Algèbre

Ch. II: Fonctions alg. rat. entières à une variable, de degré quelconque - Equations algébriques à une inconnue, de degré quelconque.

Ch. III: Fonctions alg. rat. entières à n variables et de degré quelconque.

Ch. IV: Systèmes de n fonctions homogènes entières du 1^{er} degré à n variables. Résolution générale de n équations du 1^{er} degré à n inconnues. Théorie des déterminants.

Ch. V: Fonctions homogènes entières de degré quelconque à 2 variables.

Ch. VI: Fonctions homogènes entières du second degré (formes quadratiques) à n variables.

Section III: Division indéfiniment prolongée.

Ch. I: Séries récurrentes.

Section IV: Fonctions exponentielles et logarithmiques;
fonctions trigonométriques directes et inverses. (2 Chapitres)

Section V: Sommes et produits infinis.

Ch. I: Propriétés générales des sommes et produits infinis.

Ch. II: Séries de puissances développant les fonctions fondamentales de l'Analyse (binôme, exponentielle, log. arc tg.)

V. 1500. 8° | Second Volume: Calcul différentiel et intégral (1880.)

Section I: Calcul différentiel et intégral pour les grandeurs réelles.

Ch. I: Différentiation des fonctions d'une variable réelle.

Ch. II: Principes de l'intégration.

Ch. III: Développement des fonctions d'une variable en séries de puissances. (Taylor, MacLaurin.)

Ch. IV: Applications des séries précédentes suivant les puissances d'une variable.

Ch. V: Différentiation des fonctions de plusieurs variables.

Ch. VI: Développement des fonctions de plusieurs variables en séries de puissances.

Ch. VII: Maxima et minima des fonctions de plus. variables.

Ch. VIII: Principes de la théorie de la courbure des lignes et des surfaces.

Ch. IX: Intégrales des fonctions d'une variable.

Ch. X: Représentation des fonctions par des séries trigonométriques.

Ch. XI: Equations différentielles à une variable indépendante.

Ch. XII: Intégrales doubles et multiples.

Ch. XIII: Intégration de différentielles complètes.

Ch. XIV: Inversion d'un système de fonctions.

Section II: Calcul différentiel et intégral pour les gr. Complexes.

Ch. I: Différentiation des fonctions d'une variable complexes.

Ch. II: Inversion d'une fonction d'une variable complexes.

Ch. III: Intégration des fonctions de variables complexes.

Ch. IV: Développement des fonctions d'une var. complexes en séries de puissances. Théorème de Cauchy.

Hermann Schubert (Prof. a. d. Lehrerschule des Johanneums in H.)
Zählen und Zahl. Ein kulturgeschichtliche Studie.
Hambourg, 1887.

ap. Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher
Vorträge, herausgeg. v. Virchow und Holtzendorff
Neue Folge, II. Serie. Heft 37.

Cf. Hankel, Beiträge zur Geschichte der Mathematik (Leipz. 1874)
Moritz Cantor, Beiträge zum Kulturleben der Völker (Halle, 1863)
" Geschichte der Mathematik (Leipzig 1880)

— Pour qu'il y ait nombre, il faut pouvoir faire abstraction
de la nature des objets comptés (1)

Compter des objets, c'est leur en faire correspondre (zuordnen)
d'autres un à un (par ex. les doigts des mains et des pieds.)

Ainsi, si dans une classe il y a autant de pères que
d'élèves, le maître constate d'un coup d'œil si tous les élèves
sont présents, en s'assurant que chaque père porte un chapeau.

Par là même il a compté ses élèves, alors même qu'il n'aurait
aucun mot ni signe pour représenter leur nombre.

Les noms de nombres naturels consistent dans la répétition
d'un son (ex: les heures que sonne une horloge.)

Les signes de nombres naturels consistent dans la répétition
d'un signe (ex: dominos, dés, cartes; bâtons, etc.)

(1) On ne peut pas dire qu'une came a les dix du nombre de ses
petits, parce que, les connaissant tous personnellement,
elle peut s'apercevoir qu'il en manque.

(1854.)

Bellavitis - Exposition de la Méthode des Equipollences, trad. Laisant.
Gauthier Villars, 1874.

5. Somme géométrique ou composée équipollente de plusieurs droites (B. imagine un voyageur qui les parcourt successivement.)
10. Règle I: $AB + BC \equiv AC$
Conséquence immédiate de la définition de la somme
12. Toutes les opérations additives s'appliquent aux droites de l'espace. Mais les opérations multi^{plies} ne se définissent que dans le plan.
13. Longueur et inclinaison d'une droite: la 1^{re} rapportée à une unité de mesure fixe; la 2^e, à une direction fixe
9. Une équipollence détermine 2 inconnues, savoir la longueur et l'inclinaison d'une droite inconnue (gr. AB, inc. AB.)
16. Produits et quotients. L'équipollence:
 $AB \cdot CD \equiv EF \cdot GH$
équivalent aux deux égalités:
 $gr. AB \times gr. CD = gr. EF \times gr. GH$
 $incl. AB + incl. CD = incl. EF + incl. GH$
17. Interprétation d'une équipollence homogène quelconque
18. Principe fondamental. On peut faire sur les équipollences relatives aux figures planes toutes les opérations et transformations qui sont légitimes pour les équations algébriques, et les équipollences qui en résultent sont toujours exactes.
19. Une équipollence binôme:
venant à: $inc. IL = inc. MN$ $m. gr. IL = n. gr. MN$
à moins que: $m = n = 0$.
- Règle II: Si les deux termes d'une équipollence binôme ont des inclinaisons différentes, chacun d'eux est nul
21. Relation de la méthode des équipollences avec l'ancien des parallèles et celle des figures semblables. Comme celles-ci venant à établir cette méthode, on peut les en déduire à leur tour, ce qui fait une «route de cercle vicieux»

24. Toute formule de l'algèbre se traduit par une relation entre les points d'une droite; on peut l'étendre aux points d'un plan.

Théorème général. Toute propriété des points d'une droite donne un théorème relatif aux points d'un plan, par le seul changement des équations en équipollences.

29. Pour quatre points en ligne droite ou à l'égalité,

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Pour tout quadrilatère ABCD on a l'équipollence

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \equiv AC \cdot BD$$

Lett. de Proclius (pour le quadrilatère inscrit) a lieu

dans le cas particulier où : inc. $AB \cdot CD = \text{inc. } AD \cdot BC$

d'où : gr. $AB \cdot CD + \text{gr. } AD \cdot BC = \text{gr. } AC \cdot BD$

35. Entre quatre points d'une droite ou d'un plan on a l'égalité : $AB \cdot AD + BC \cdot CD = AC (AB + CD)$

Menons $BL \equiv CD$, d'où : $AB + CD \equiv AL$: on a

l'équipollence : $AB \cdot AD + BC \cdot CD \equiv AC \cdot AL$

45. Droites conjuguées : même grandeur, inclinaisons symétriques.

48. OI et OH étant égaux et perpendiculaires, on écrit :

$$OI \equiv \sqrt{OH} \quad \sqrt{\text{ramon} (i)}.$$

50. Règle VI. Le ramon. Le calcul précisément comme le calcul en algèbre l'imaginaire $\sqrt{-1}$.

$$48. \sqrt{-1} = -1 \quad \sqrt{-1} = +1. \quad (\text{on change par l'inclinaison})$$

ε^u représente un coefficient destiné à accroître l'inclinaison d'un angle égal à u (rapporté à base de longueur égale au rayon)

Ainsi : $\varepsilon = e^{\sqrt{-1}}$

49. $\sqrt{-1}$ représente la unité de longueur acquise pour inclinaison u droits.

La vraie théorie des quantités négatives et des quantités
présumées imaginaires; dédié aux amis de l'école de
par C. V. Mourey (1828) 2^e éd. Mallet-Bachelier 1861.

Extrait de la Préface: «... avec un nouveau système d'Algèbre,
que je cherchais, j'ai trouvé un nouveau système de Géométrie,
dont je ne m'attendais pas. Ce n'est cependant pas deux
sciences; ce n'est qu'une seule science, une seule théorie, laquelle
a deux faces, l'une algébrique et l'autre géométrique....»
«L'idée fondamentale de cette théorie est celle du chemin,
considéré comme conduisant en un seul sens.»

«D'après ce système, toutes les racines des équations sont des
chemins réels, toutes les formules usitées en Algèbre expriment
des chemins réels situés sur un même plan; toutes les racines
de l'unité, en particulier, sont sur les rayons d'un même cercle.»
«Au moyen de cette méthode, nous pourrions enfin dire autre
que toute équation a au moins une racine....»

Considération du sud et du nord, du droit et du gauche.

1. Lignes directives, Addition: deux chemins de suite.

Formule fondamentale: $AB + BC = AC$

C'est une convention.

2. L'auteur n'admet pas la soustraction algébrique (où x est inconnu
ou indéterminé) et cherche le moyen de y suppléer.

3. L'égalité n'est pas une relation absolue: deux choses sont égales
pour tel emploi, c'est sans un certain rapport.

Pour que deux chemins soient égaux, même longueur & même direction.

4. La somme de deux chemins inverses est zéro. Le signe - (qui
n'a plus à désigner la soustraction) veut dire inverse de.

21. Angle directif (ϵ). Verseur a_2 . Soient 2 rayons égaux,
 30. AB, AC ; $\epsilon = \text{angle } BAC = \text{rapport directif de } AC \text{ à } AB$.
 15. Nombres directifs (Le nombre absolu ne peut être ni fractionnaire ni directif).
 42. Une proposition entre nombres directifs équivaut à un
 29. équiquotient entre les longueurs et à une équidifférence
 entre les ~~inclinaisons~~ verseurs (angles.)

Essai sur la théorie et l'interprétation des quantités dites
imaginaires, par A. Pature (de Gap.) 1^{er} mémoire.
 Bachelier, 1845.

(L'auteur connaît Buez, Argand, Francais, Mourey.)
 Cherche à interpréter les racines imaginaires comme ou fait
 les racines négatives. ($\sqrt{p^2 - q^2}$ interprété comme $\sqrt{q^2 - p^2}$.)
 v. Carnot.

Addition, suite de la composition des forces; on additionne
 séparément la parties réelles et les parties imaginaires.

32. Multiplication; on multiplie les longueurs et l'on ajoute
 les inclinaisons.

$$a + b\sqrt{-1} = p (\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{-1})$$

$$c + d\sqrt{-1} = q (\cos \beta + \sin \beta \sqrt{-1})$$

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = pq (\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)\sqrt{-1})$$

$$\left(p (\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{-1}) \right)^m = p^m (\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{-1})^m = p^m (\cos m\alpha + \sin m\alpha \sqrt{-1})$$

par la formule de Moivre.

40. Toute équation ou polynôme a une racine.

Notes sur la polarisation de la lumière.

d'après Bouasse.

Toute lumière réfléchie est partiellement polarisée.

Le plan de polarisation est le plan d'incidence.

Polarisation totale par réflexion sur verre de indice moyen (1,52) sous un angle de 56° .

Un appareil polariseur peut servir d'analyseur. Le minimum d'intensité a lieu quand le plan principal de l'analyseur est perpendiculaire au plan de polarisation.

Quand ce minimum est nul la polarisation est totale.

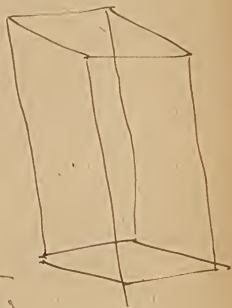
Double réfraction. Certains cristaux réfractent ^{un} rayon incident en deux rayons complètement polarisés dans deux plans rectangulaires. Le spath d'Islande (carte beaucoup plus deux rayons réfractés).

Un Nicol est un parallélépipède oblique de spath qui ne laisse passer qu'un des deux rayons suivant sa longueur. Le plan de polarisation de ce rayon est parallèle ^{à la} grande diagonale des faces terminales (en forme de losange).

~~La~~ La section principale du Nicol passe par les deux petites diagonales des faces.

Quand un Nicol sert d'analyseur, et que sa position correspond au minimum d'intensité (ou à l'extinction totale), le plan de polarisation du faisceau analysé est parallèle à la section principale du Nicol.

Quand un faisceau de lumière naturelle traverse deux Nicols, son intensité est maxima quand leurs sections principales sont parallèles; nulle quand elles sont rectangulaires.



Polarisation rotatoire

Une lame de quartz à faces parallèles et normale à l'axe du cristal (prisme hexagonal) fait tourner le plan de polarisation d'un faisceau lumineux qui la traverse suivant l'axe, à droite ou à gauche suivant la nature du cristal (dextrogyre, lévogyre).

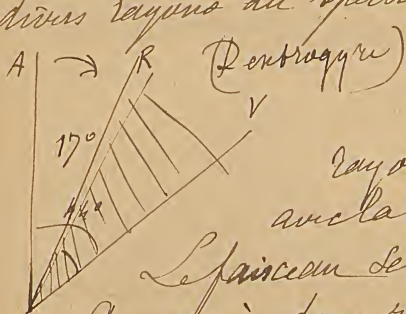
La rotation est proportionnelle à l'épaisseur de la lame.

L'angle de rotation varie avec la couleur du rayon (longueur d'onde) depuis le rouge extrême : 645 μ long. d'onde $17^{\circ} 29' 47''$ jusqu'au violet extrême : 406 μ $44^{\circ} 4' 58''$

(μ = millième de micron = millionième de millimètre)

Pour une lame de 1 millimètre d'épaisseur.

En somme, ^{quand} la lumière blanche polarisée a passé par une lame de quartz de 1 mm. au lieu du plan de polarisation unique on a un éventail de plans de polarisation ROV pour les divers rayons du spectre, du rouge au violet (ROA = 17° , VOA =

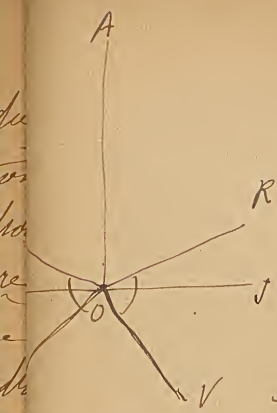


Si l'on regarde le faisceau à travers un second Nicol, on l'éteindra que les rayons dont le plan de polarisation coïncide avec la section principale du Nicol (petite diagonale).

Le faisceau sera coloré de la teinte complémentaire.

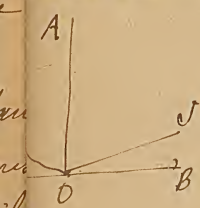
Quartz à deux rotations.

Une lame de quartz de 3 mm 75 fait tourner de 90° le plan de polarisation des rayons jaunes. Si l'on fait après deux lames de polarisation des rayons jaunes. Si l'on fait après deux lames de polarisation des rayons jaunes, l'une dextrogyre, l'autre lévogyre ou inversement. Si on le fait traverser par un faisceau de lumière polarisée, les rayons jaunes seront déviés de 90° à droite et à gauche, car leurs plans de polarisation seront en prolongement l'un de l'autre.



Si l'on regarde à travers un Nicol dont la section principale est perpendiculaire à OA , il éteint symétriquement les deux faisceaux, et les deux moitiés du bilame ont la même teinte rouge vineuse, dite teinte sensible; mais si l'on fait tourner tant soit peu le Nicol, les rayons éteints à droite et à gauche ne sont plus les mêmes, et les deux moitiés du bilame prendront des teintes différentes (rouge et violet ou bleu). C'est un moyen précis pour déterminer le plan de polarisation d'un faisceau primitif. Pour faire tourner le Nicol de manière à obtenir la même teinte (sensible), la grande diagonale du Nicol est à trois fois parallèle au plan de polarisation.

Avec la lumière simple du sodium, dont le plan de polarisation est à 80° par le bilame de $3^{\text{mm}} 75$, les deux moitiés du bilame paraissent jaunes; elles sont également éclairées quand la section principale du Nicol est perpendiculaire au plan de polarisation primitif; inégalement, dès qu'on tourne le Nicol: des deux moitiés l'une est jaune brillante, l'autre éteinte.



Lame demi-onde (de quatre parallèles à l'axe, ou de mica). Cette lame a un axe et elle a la propriété de réfléchir le plan de polarisation par rapport à cet axe OS : par exemple OA vient en OA' . Si l'on intercepte par cette lame la moitié du faisceau, le faisceau total a deux plans de polarisation symétriques par rapport à l'axe de la lame demi-onde. Pour que les deux moitiés du faisceau, vues à travers un Nicol aient la même intensité, il faut que la section principale du Nicol

coïncide avec la bissectrice des deux plans de polarisation, c'est-à-dire soit parallèle à l'axe de la lame demi-onde. L'orientation du plan de polarisation primitif OA est indifférente, mais les deux moitiés du faisceau sont d'autant plus obscures que l'angle AOS est plus petit.

Pour obtenir des rotations variables d'une façon continue, on emploie deux lames de quartz ^{superposées} l'une dextrogyre, l'autre lévogyre de même épaisseur (effet nul). Seulement l'une est fendue en diagonale et ses deux moitiés peuvent se croiser plus ou moins de manière à augmenter ou à diminuer son épaisseur; ce ~~croisement~~ produit le même effet qu'une lame d'épaisseur variable qui serait tous à fois dextrogyre et lévogyre.

Pouvoir rotatoire des dissolutions.

On dissout un poids p (dans un volume V de liquide inactif) on le verse dans un tube de longueur l (unité: 10 centimètres) la rotation est donnée par la formule:

$$R = p \frac{p l}{V}$$

p étant le coefficient rotatoire (+ à droite, - à gauche).

Saccharose: $p = +74^\circ$

Glucon: $+53^\circ$

Lactose: $+58^\circ$

Dextrine: $+119^\circ$

Lévilose: $p = -106^\circ$

Gomme: -36°

Albumine: -35°

La formule permet de valuer p connaissant p et R (saccha



